

В. Я. Гебель.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРСЪ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Часть II.

ДИНАМИКА.

Съ приложеніемъ собранія задачъ.

МОСКВА.
Типо-литографія „Русскаго Товарищества печатн. и издательскаго дѣла".
Чистые пруды, Мыльниковъ пер., собств. домъ.
1906.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Написать для учащихся въ техническихъ училищахъ *доступный* и вмѣстѣ съ тѣмъ *основной* курсъ теоретической механики, — вотъ цѣль автора этой книги.

Чтобы курсъ былъ *доступнымъ*, очевидно, онъ долженъ быть ясенъ и простъ по изложенію, долженъ избѣгать сухости и лаконичности; развиваемыя въ немъ отвлеченныя положенія всегда должны поясняться наглядными примѣрами. Но, независимо отъ этого, курсъ механики въ техническомъ училищѣ долженъ быть *основнымъ* курсомъ, т.-е. по возможности систематическимъ и научнымъ: только тогда надлежащее усвоеніе его дастъ и богатый матеріалъ для развитія общаго и спеціально техническаго мышленія, и незамѣнимое орудіе для изученія другихъ спеціальныхъ отраслей знанія. Поэтому въ немъ должны быть изложены особенно подробно и обстоятельно всѣ основныя начала и понятія, а всѣ предложенія и слѣдствія изъ нихъ должны быть доказаны (хотя бы и элементарно), а не приняты лишь на вѣру.

Наконецъ, необходимо стремиться и къ тому, чтобы учащіеся никогда не теряли изъ вида, что они изучаютъ механику, т.-е. физическую науку, а не какую-то прикладную математику, т.-е., чтобы математическія формулы и преобразованія не заслоняли и не затемняли сущности изучаемыхъ явленій. Преподаватель всегда долженъ помнить слова знаменитаго *Вил. Томсона:* „Нѣтъ ничего вреднѣе для успѣшнаго изученія, какъ слишкомъ большое довѣріе къ математическимъ символамъ. Занимающійся слишкомъ склоненъ къ выбору наиболѣе легкаго пути, къ замѣнѣ явленія — формулой, къ принятію этой формулы за реальный физическій фактъ“.

Затрудненія при составленіи такого курса понятны каждому спеціалисту. Они начинаются съ первыхъ же страницъ кинематики и настолько существенны, что приходилось даже не-

однократно слышать мнѣнія, категорически отрицающія возможность составленія удовлетворительнаго курса механики для средней школы. Эти мнѣнія, впрочемъ, вполнѣ опровергаются существованіемъ въ нашей литературѣ такихъ почтенныхъ трудовъ, какъ руководства Пальшау, Гуржеева и въ особенности талантливой книги Кирпичева „Начала механики".

Удалось ли автору предлагаемаго курса удовлетворительно разрѣшить поставленную имъ задачу, — судить не ему. Промахи въ этомъ отвѣтственномъ трудѣ неизбѣжны, поэтому онъ будетъ глубоко признателенъ за всякое серьезное замѣчаніе, которое и приметъ къ свѣдѣнію въ слѣдующемъ изданіи, если таковому суждено будетъ появиться.

Едва ли нужно здѣсь излагать содержаніе книги и характеризовать ея отдѣлы: всякій компетентный читатель сдѣлаетъ это самъ. Но, на основаніи многолѣтняго опыта преподаванія, авторъ позволяетъ себѣ рекомендовать изученіе курса двумя концентрами, относя къ первому изъ нихъ: кинематику прямолинейныхъ движеній, введеніе въ статику и динамику, статику, за исключеніемъ ученія о равновѣсіи въ самомъ общемъ видѣ, и нѣкоторыя предложенія динамики (ученіе о работѣ, уравненія движеній). Къ курсу приложено довольно много задачъ съ отвѣтами и въ нѣкоторыхъ случаяхъ съ рѣшеніями. Нечего и распространяться, что этимъ упражненіямъ авторъ придаетъ самое существенное значеніе для усвоенія предмета.

При составленіи этого руководства авторъ пользовался, въ той или другой степени, курсами механики: Щукина, Вышнеградскаго, Жуковскаго, Делоне, Гречанинова, Фанъ-деръ-Флита, Котельникова, Бобровскаго (статика), Todhunter'а, Poinsot, Lauenstein'а, Weissbach'а.

Эта книга представляетъ переработанный и дополненный курсъ составленныхъ мною литографированныхъ записокъ для учениковъ техническаго училища Моск. Общества расп. техническихъ знаній. Съ интересомъ и любовью посвящалъ я свой досугъ этому труду. Да будетъ же полезенъ онъ русскому учащемуся юношеству!

Мартъ 1906 г.

Динамика точки.

§ 176. **Опредѣленіе динамики.** Открытые Галилеемъ и Ньютономъ основные законы механики устанавливаютъ лишь самыя общія зависимости или соотношенія между силами, дѣйствующими на тѣло, и его движеніями.

Подробное изслѣдованіе этихъ соотношеній, выведеніе изъ нихъ всѣхъ возможныхъ слѣдствій и, наконецъ, примѣненіе найденныхъ такимъ образомъ истинъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ движенія и равновѣсія составляетъ содержаніе части механики, называемой **динамикой**.

Для постепенности перехода отъ болѣе простыхъ къ болѣе сложнымъ явленіямъ, вначалѣ будутъ изложены основы динамики свободной и несвободной матеріальной точки (или тѣла, разсматриваемаго какъ матер. точка), а затѣмъ основы динамики свободнаго и несвободнаго твердаго тѣла, какъ цѣлой неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ.

Механическая работа силы.

§ 177. **Понятіе о механической работѣ.** Если сила, приложенная къ тѣлу, приводитъ его въ движеніе, необходимо преодолѣвая при этомъ различныя сопротивленія, какъ-то: вѣсъ тѣла, треніе, сопротивленіе среды, силу сцѣпленія частицъ (напр., при дѣйствіи силы, двигающей рѣзецъ) и т. д., то говорятъ, что эта *сила производитъ механическую работу*. Итакъ, механическая работа есть не что иное, какъ результатъ дѣйствія силы на тѣло, состоящій въ перемѣщеніи этого тѣла на нѣкоторую длину.

Терминъ „механическая работа“, опредѣляющій одно изъ важнѣйшихъ понятій механики, слѣдуетъ признать очень удачнымъ,

такъ какъ въ дѣйствительности всякая физическая или механическая работа, какъ нетрудно провѣрить, состоитъ въ перемѣщеніи тѣла подъ дѣйствіемъ силы.

Не смотря на крайнее разнообразіе силъ (живыхъ существъ, пара, воды, вѣтра, тяжести и проч.) и производимыхъ ими работъ, легко убѣдиться на любомъ примѣрѣ, что величина механической работы возрастаетъ прямо пропорціонально: 1) величинѣ силы и 2) длинѣ пути, пройденнаго точкой приложенія силы.

Дѣйствительно, чѣмъ больше, напр., напряженіе силы лошади, везущей нагруженную телѣгу, тѣмъ больше и ея работа; точно также, чѣмъ дальше лошадь провезетъ эту телѣгу, тѣмъ тоже больше будетъ ея работа *). Если напряженіе силы увеличится вдвое, то и работа увеличится вдвое; если при этомъ точка приложенія силы пройдетъ втрое бо́льшій путь, то работа еще увеличится втрое, а слѣдовательно, всего работа увеличится въ шесть разъ.

Въ простѣйшемъ случаѣ, когда тѣло подъ дѣйствіемъ постоянной силы движется по пути, совпадающему съ направленіемъ силы (что происходитъ, напр., при поднятіи грузовъ по вертикальному направленію), численная величина работы силы равна произведенію изъ численной величины силы на численную величину пути, пройденнаго ея точкой приложенія. Итакъ, обозначивъ величину этой силы черезъ F, длину пройденнаго пути черезъ s, величину работы черезъ T, будемъ имѣть, что

$$T=F.s.$$

§ 178. **Единицы работъ. Мощность.** Для измѣренія работъ, какъ величинъ особаго рода, существуютъ соотвѣтственныя мѣры или единицы. *Единицей работы называется работа, производимая единицей силы на протяженіи единицы длины пути, совпадающаго съ направленіемъ силы.*

Метрическая единица работы, называемая *килограммометромъ*, есть работа, производимая при поднятіи 1 килограмма на 1 метръ.

Наиболѣе употребительная русская единица работы есть *пудофутъ,* выражающій работу, производимую при поднятіи 1 пуда

---

*) Очень рекомендуется провѣрить это на нѣсколькихъ другихъ примѣрахъ работъ, напр., строганіе, пиленіе и пр.

на 1 футъ. Слѣдуетъ замѣтить, что 1 пудо-футъ $=$ 5 килограммометрамъ.

Въ абсолютной системѣ мѣръ (§ 84) единица работы есть *эргъ*, представляющій работу *1-го дина* на протяженіи *1-го сантиметра*.

Въ электротехникѣ употребляется единица работы *джауль* $= 10.000.000 = 10^7$ эрговъ *).

Такъ какъ на практикѣ очень важно знать не только величину работы, но и время, въ которое она производится, то введено понятіе о работѣ, производимой въ единицу времени (секунду). Такая работа называется *мощностью* (или рѣже эффективной работой).

Очевидно, что метрическая единица мощности есть килограммометръ-секунда; русская единица мощности — пудо-футъ-секунда и т. д.

Для измѣренія работъ паровыхъ машинъ и другихъ сильныхъ двигателей употребляется единица мощности, называемая *лошадиной силой* и равная 75 килограммометрамъ или 15 пудо-футамъ въ секунду. Въ технической литературѣ слово „лошадиная сила" часто замѣняется двойной буквой *HP* (отъ *Horse Power*—лошадиная сила) **).

Единица мощности въ электротехникѣ есть *уаттъ* (или *вольтъ-амперъ*), равный 1 джаулю въ секунду. Уаттъ $= \frac{1}{736}$ лошадиной силы.

Изъ самаго опредѣленія механической работы слѣдуетъ, что одна и та же величина работы можетъ быть получена самымъ различнымъ образомъ. Напр., работу, равную 12 пудо-футамъ, могутъ произвести силы въ $^1/_2$, 1, 2, 3,... 12 пудовъ, если пути, проходимые ихъ точками приложенія, будутъ соотвѣтственно равны

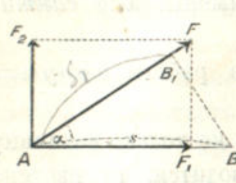
*) Не трудно доказать, что 1 джауль $=$ 1 килограммометру, раздѣленному на g, т.-е. на 9,8 м. Докажите это!

Употребляются и другія единицы работы: *фунто-футъ* $= \frac{1}{40}$ пудо-фута; *килограммо-сантиметръ* $=$ 0,01 килограммометра и т. д.

**) Терминъ „лошадиная сила", данный изобрѣтателемъ паровой машины Джемсомъ Уаттомъ и вошедшій во всеобщее употребленіе, очевидно очень неудаченъ по своей неправильности, такъ какъ въ немъ смѣшиваются два различныхъ понятія: сила и работа.

24, 12, 6, 4,...1 фут., такъ какъ $\frac{1}{2}.24 = 1.12 = 2.6 = 3.4 = \ldots = 12$.

§ 179. Разсмотримъ теперь, какъ опредѣляется величина работы, если направленіе постоянной силы F не совпадаетъ съ направленіемъ пути $AB = s$ пройденнаго ея точкой приложенія, а составляетъ съ нимъ нѣкоторый уголъ α (фиг. 101).



Фиг. 101.

Разложивъ силу F на двѣ составляющія F_1 и F_2, видимъ, что сила F_2, перпендикулярная къ направленію пути s, никакой работы не производитъ, такъ какъ по ея направленію тѣло не имѣетъ движенія. Отсюда заключаемъ, что путь $AB = s$ тѣло проходитъ исключительно вслѣдствіе дѣйствія второй составляющей $F_1 = F.\cos\alpha$, которая есть ничто иное, какъ проекція силы F на направленіе пути AB.

Итакъ, *если направленіе силы и пути не совпадаютъ, то работа силы равна произведенію $F_1 . s$ проекціи силы (на направленіе пути) на длину пройденнаго пути или, что все равно, произведенію $F . s_1$ силы на проекцію пройденнаго пути (на направленіе силы).* Это послѣднее выраженіе получается изъ подобія $\triangle\triangle$-ковъ AFF_1 и ABB_1, откуда $\frac{F_1}{F} = \frac{s_1}{s}$ или $F_1 . s = F . s_1$.

Оба послѣднія выраженія, какъ легко видѣть, объединяются общей формулой

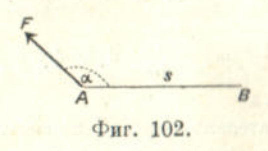
$$T = Fs\cos\alpha.,$$

изъ которой можно получить уже разсмотрѣнные частные случаи:

1. Если направленіе силы и пути совпадаютъ, то $\alpha = 0^0$; $\cos 0^0 = 1$ и слѣдовательно $T = F.s$.

2. Если сила перпендикулярна къ направленію пути, то $\alpha = 90^0$, $\cos 90^0 = 0$; $T = 0$.

3. Если направленіе силы съ направленіемъ пути образуетъ *тупой* уголъ, т.-е., если $\alpha > 90^0$ (фиг. 102), то выраженіе работы $T = Fs\cos\alpha$ представляетъ отрицательную величину и называется *отрицательной работой.* Такъ какъ при этомъ точка A приложенія силы F двигается въ сторону, противоположную направленію силы, то мы

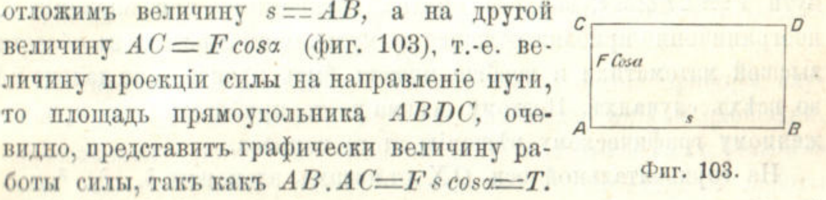


Фиг. 102.

должны заключить, что движеніе точки A происходитъ или по инерціи, или подъ дѣйствіемъ нѣкоторой другой, нами не разсматриваемой силы, которая, дѣйствуя на точку A по направленію, совпадающему съ направленіемъ пути или образующему съ нимъ острый уголъ, преодолѣваетъ дѣйствіе силы F. Наша сила F въ обоихъ этихъ случаяхъ представляетъ очевидно *сопротивленіе* движенію.

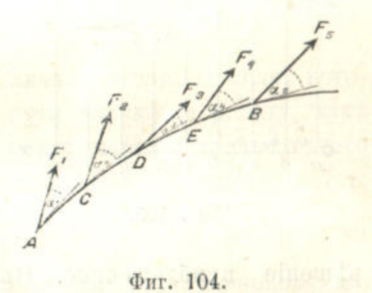
Итакъ, сила F можетъ производить или положительную работу, называемую *работой движущей силы*, или отрицательную работу, называемую *работой сопротивленія*.

Если на одной изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ отложимъ величину $s = AB$, а на другой величину $AC = F\cos\alpha$ (фиг. 103), т.-е. величину проекціи силы на направленіе пути, то площадь прямоугольника $ABDC$, очевидно, представитъ графически величину работы силы, такъ какъ $AB . AC = F s \cos\alpha = T$.



Фиг. 103.

§ 180. **Работа перемѣнной силы на криволинейномъ пути.** Самый общій видъ механической работы представляетъ тотъ случай, когда сила *перемѣнная по величинѣ и направленію* дѣйствуетъ на точку (или на тѣло, принимаемое за точку), движущуюся по криволинейному пути, не совпадающему съ направленіемъ силы (фиг. 104).



Фиг. 104.

Раздѣлимъ криволинейную траекторію AB на весьма большое число столь малыхъ частей AC, CD, DE,... чтобы безъ большой погрѣшности можно принять, что эти части (элементы пути) прямолинейны и силы, дѣйствующія на протяженіи каждаго изъ этихъ элементовъ, постоянны по величинѣ и направленію.

Назовемъ черезъ δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$ длину 1-го, 2-го, 3-го... элемента пути, черезъ F_1, F_2, $F_3, \ldots$ постоянныя значенія перемѣнной силы на протяженіи каждаго изъ этихъ элементарныхъ участковъ пути, и черезъ α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ углы, составляемые силами F_1, F_2, $F_3, \ldots$ съ направленіями соотвѣтствующихъ участковъ пути δ_1, δ_2, δ_3, ... Тогда работа, произведенная на 1-мъ эле-

ментѣ $T_1 = F_1\delta_1 \cos\alpha_1$, на 2-мъ элементѣ $T_2 = F_2\delta_2 \cos\alpha_2$, на 3-мъ элементѣ $T_3 = F_3\delta_3\cos\alpha_3$ и т. д.*). Полная работа T перемѣнной силы на криволинейномъ пути очевидно равна суммѣ этихъ элементарныхъ работъ, т.-е.

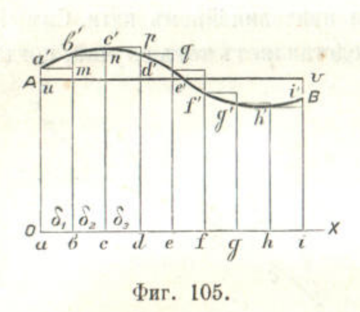
$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots = F_1\delta_1\cos\alpha_1 + F_2\delta_2\cos\alpha_2 + F_3\delta_3\cos\alpha_3 + \ldots$$

или, употребляя сокращенное обозначеніе суммы однородныхъ слагаемыхъ

$$T = \Sigma F\delta\cos\alpha$$

§ 181. **Графическое изображеніе работы перемѣнной силы.** Вычисленіе выраженія работы перемѣнной силы на криволинейномъ пути $T = \Sigma F\delta\cos\alpha$, которое вполнѣ справедливо при значеніи δ, неограниченно приближающемся къ нулю, принадлежитъ къ области высшей математики и вообще можетъ быть произведено далеко не во всѣхъ случаяхъ. Поэтому весьма часто прибѣгаютъ къ приближенному графическому рѣшенію этого вопроса.

На горизонтальной оси OX отложимъ элементы $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ пути и изъ концовъ ихъ возставимъ перпендикуляры, соотвѣтственно равные значеніямъ $F_1\cos\alpha_1$, $F_2\cos\alpha_2, \ldots$ (фиг. 105). Тогда площади $aba'm$, $bcb'n$, $cdc'p, \ldots$ выразятъ собой элементарныя работы $T_1 = F_1\delta_1\cos\alpha_1$, $T = F_2\delta_2\cos\alpha_2, \ldots$, а сумма ихъ — полную работу перемѣнной силы на криволинейномъ пути. Изъ чертежа видно, что это рѣшеніе приближенное. Въ дѣйствительности величина силы измѣняется плавно и непрерывно на всемъ пути, а не скачками на отдѣльныхъ элементахъ. Но уменьшая, напр., вдвое величину элементовъ $\delta_1, \delta_2 \ldots$ пути и произведя вновь тѣ же по-



Фиг. 105.

---

*) Такъ какъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ суть углы, образуемые направленіями силъ $F_1, F_2, F_3, \ldots$ съ касательными, проведенными изъ точекъ $A, B, C, \ldots$ къ элементамъ пути $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, то выраженія $F_1\cos\alpha_1$, $F_2\cos\alpha_2, \ldots$ представляютъ ничто иное какъ *касательныя слагающія* силъ $F_1, F_2, \ldots$ Слѣдовательно, работы $F_1\delta_1\cos\alpha_1$, $F_2\delta_2\cos\alpha_2 \ldots$ представляютъ работы касательныхъ слагающихъ силъ $F_1, F_2 \ldots$ Нормальныя же слагающія этихъ силъ, какъ перпендикулярныя къ направленіямъ элементовъ пути $\delta_1, \delta_2, \ldots$, никакой работы не производятъ.

строенія, получимъ вдвое бо́льшее число прямоугольниковъ, сумма площадей которыхъ уже болѣе точно будетъ выражать величину полной работы перемѣнной силы. Не трудно замѣтить, что при неограниченномъ уменьшеніи величинъ элементовъ пути, вершины a', b', c',... будутъ принадлежать нѣкоторой кривой AB. Вертикальныя разстоянія точекъ кривой AB отъ оси OX выражаютъ истинныя значенія проекцій перемѣнной силы F въ соотвѣтственныхъ точкахъ пути (или, что все равно, величины касательныхъ слагающихъ перемѣнной силы F въ этихъ точкахъ). Кривая AB носитъ поэтому названіе *силовой линіи.*

Итакъ, величина полной работы перемѣнной силы выражается площадью $ABai$, ограниченной силовой линіей, длиной пройденнаго пути и двумя крайними ординатами.

Въ прикладной механикѣ и физикѣ описываются приборы, служащіе для автоматическаго черченія силовыхъ линій и площадей, выражающихъ работу перемѣнной силы и называемыхъ *діаграммами работъ.* Таковы, напр., *индикаторы* для опредѣленія работы перемѣнной силы расширяющагося пара въ цилиндрѣ паровой машины. Точно также существуютъ приборы *(планиметры)* для весьма точнаго опредѣленія величины площадей діаграммъ работъ*).

182. **Средней силой** называется такая постоянная сила, которая можетъ произвести на томъ же пути такую же работу, какъ и данная перемѣнная сила. Назвавъ эту силу черезъ R, длину всего пути черезъ s и работу перемѣнной силы черезъ T, будемъ имѣть, что $T = R.s$, откуда $R = \frac{T}{s}$. Очевидно, что графически средняя сила изобразится высотой au прямоугольника $auvi$, равновеликаго криволинейной площади $ABai$ и имѣющаго съ ней общее основаніе ai.

---

*) Хорошій способъ вычисленія площадей, ограниченныхъ кривою и раздѣленныхъ ординатами на *четное* число *равныхъ* частей представляетъ формула Симпсона: $s = \frac{\delta}{3}\left[y_0 + y_n + 2\ (y_1 + y_3 + \dots) + 4(y_2 + y_4 + \dots)\right]$, гдѣ δ — разстояніе между сосѣдними ординатами, y_0 и y_n — крайнія ординаты, y_1, y_3,... нечетныя, а y_2, y_4,... четныя ординаты, не считая крайнихъ. Существуютъ и другіе способы вычисленія площадей діаграммъ при помощи клѣтчатой бумаги, посредствомъ взвѣшиванія и т. д.

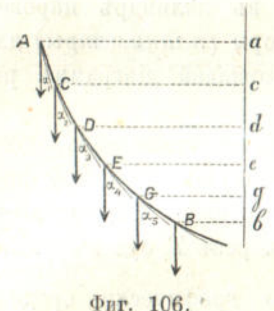
Если данная сила имѣетъ постоянное направленіе, величина же ея равномѣрно возрастаетъ или равномѣрно убываетъ, а путь точки приложенія силы прямолинейный, то силовая линія обращается въ прямую, а діаграмма работы получаетъ видъ трапеціи. Средняя сила графически изображается средней линіей этой трапеціи и по величинѣ равна полусуммѣ изъ начальнаго и конечнаго значенія величины силы.

Вообще, какъ не трудно видѣть, существуетъ полное сходство (аналогія) между способами изображенія и вычисленія средней силы и механической работы и способами изображенія и вычисленія средней скорости и пройденнаго пространства.

Изъ выраженія работы перемѣнной силы $T = \Sigma F\sigma \cos \alpha$ выведемъ два замѣчательныя слѣдствія.

§ 183. I. **Работа постоянной силы на криволинейномъ пути** *равна произведенію изъ величины силы на проекцію пути на направленіе силы.*

Положимъ, что точка A приложенія постоянной по величинѣ и направленію силы F проходитъ криволинейный путь AB (фиг. 106). Опредѣлимъ работу силы F на этомъ пути. Раздѣливъ траекторію AB на весьма большое число элементовъ AC, CD, DE,... и обозначивъ углы, составляемые касательными къ этимъ элементамъ съ постояннымъ направленіемъ силы F черезъ α_1, α_2, α_3,..., по предыдущему найдемъ, что полная работа силы равна суммѣ элементарныхъ работъ, т.-е.



Фиг. 106.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots = F.AC\cos\alpha_1 + F.CD\cos\alpha_2 + F.DE\cos\alpha_3 + \ldots$$

или
$$T = F\,(AC\cos\alpha_1 + CD\cos\alpha_2 + DE\cos\alpha_3 + \ldots)$$

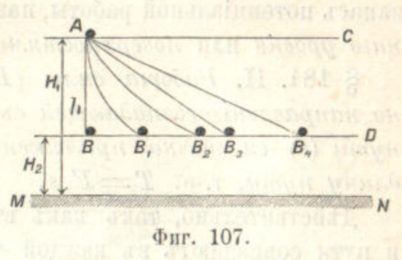
Но изъ чертежа видно, что

$$AC\cos\alpha_1 = ac,\ CD\cos\alpha_2 = cd,\ DE\cos\alpha_3 = de, \ldots$$

Поэтому $T = F\,(ac + cd + de \ldots)$ или окончательно $T = F.ab$, что и слѣдовало доказать, такъ какъ ab есть ничто иное, какъ проекція пути AB на направленіе силы F (въ данномъ случаѣ вертикальное).

Отсюда слѣдуетъ, что работа такой постоянной силы, какъ вѣсъ тѣла, зависитъ только отъ начальнаго и конечнаго положе-

нія этого тѣла, считая по вертикали, и нисколько не зависитъ ни отъ вида, ни отъ длины пути, описываемаго имъ при паденіи. Дѣйствительно, работа вѣса тѣла, падающаго изъ точки А (фиг. 107) по различнымъ прямолинейнымъ или криволинейнымъ траекторіямъ AB, AB_1, AB_2, AB_3, . ., будетъ одна и та же, а именно $T=Ph$, гдѣ P — вѣсъ тѣла, а h — разстояніе по вертикали между его начальнымъ и конечнымъ положеніемъ.



Фиг. 107.

Проведемъ двѣ горизонтальныя плоскости AC и BD черезъ начальное и конечное положеніе тѣла и назовемъ разстоянія ихъ отъ нѣкоторой постоянной третьей плоскости MN (за которую, напр., можемъ принять поверхность земли) черезъ H_1 и H_2.

Замѣтивъ, что $h=H_1-H_2$, находимъ, что $T=P\ (H_1-H_2)$, т.-е. работа силы тяжести равна вѣсу тѣла, умноженному на разность высотъ его начальнаго и конечнаго положеній.

Легко видѣть, что, гдѣ бы ни находилось наше тѣло на плоскости AC, оно при паденіи по какой угодно траекторіи произведетъ одну и ту же работу $Ph=P\ (H_1-H_2)$, если падаетъ на плоскость BD или работу PH_1, если падаетъ на плоскость MN. Точно также, если тѣло падаетъ съ какого угодно мѣста плоскости BD по какой угодно траекторіи на плоскость MN, то оно произведетъ одну и ту же работу PH_2. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что тяжелое тѣло вѣса P, лежащее гдѣ бы то ни было на плоскости AC, имѣетъ постоянный *запасъ возможной или потенціальной*) работы* $=PH_1$, относительно постоянной плоскости MN. Точно также это тѣло, если оно лежитъ въ какомъ угодно мѣстѣ плоскости BD имѣетъ постоянный запасъ потенціальной работы $=PH_2$.

Если вмѣсто плоскости MN вообразимъ шаровую поверхность земли, то плоскости AC и BD, чтобы сохранить только что указанное свойство, должны обратиться въ шаровыя, концентрическія съ землею, поверхности, отстоящія отъ нея на разстояніяхъ H_1 и H_2. Тяжелыя тѣла, лежащія на любомъ мѣстѣ этихъ поверхностей, имѣютъ по

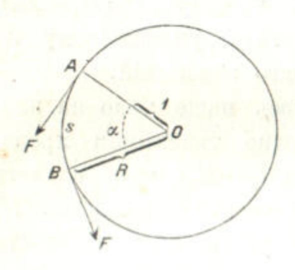
*) Отъ латинскаго слова *potentialis* — *возможный*.

прежнему постоянные запасы работы PH_1 и PH_2. Замѣтимъ, что поверхности, на всѣхъ точкахъ которыхъ тѣло имѣетъ постоянный запасъ потенціальной работы, называются *поверхностями постояннаго уровня* или *поверхностями постояннаго потенціала.*

§ 184. II. *Работа силы (F), постоянной по величинѣ, но по направленію совпадающей съ касательной къ криволинейному пути (s) ея точки приложенія, равна произведенію силы на длину пути*, т.-е. $T=F.s$.

Дѣйствительно, такъ какъ въ этомъ случаѣ направленія силы и пути совпадаютъ въ каждой точкѣ и такъ какъ полная работа силы равна суммѣ ея элементарныхъ работъ, то $T=F.s$. Если, напр., точка приложенія силы описываетъ при этихъ условіяхъ окружность, то работа силы $T=F.2\pi R$.

§ 185. **Работа постоянной силы во вращательномъ движеніи.** Назовемъ произвольную дугу, описанную радіусомъ, равнымъ единицѣ, *угловымъ перемѣщеніемъ* и обозначимъ ее буквой α (фиг. 108). Тогда дуга s, соотвѣтствующая этому угловому перемѣщенію (т.-е. имѣющая съ нимъ одно и то же число градусовъ), но описанная радіусомъ R, будетъ равна $s=\alpha R$, что слѣдуетъ изъ пропорціи



Фиг. 108.

$$s:\alpha=R:1.$$

Если постоянная по величинѣ сила F касательна къ перемѣщенію s ея точки приложенія, то по предыдущему работа ея

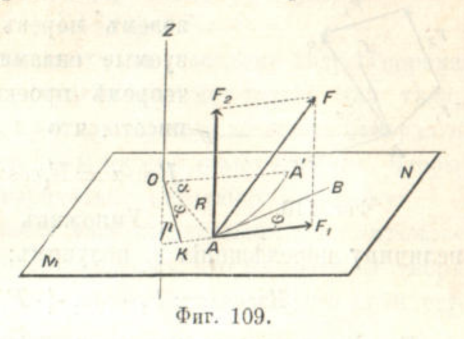
$$T=F.s=F.\alpha R \quad \text{или} \quad T=\alpha FR \; . \; . \; . \; (1)$$

Но произведеніе $F.R$ есть ничто иное, какъ моментъ силы относительно центра O вращенія или, что все равно, относительно оси вращенія, проходящей черезъ центръ и перпендикулярной къ плоскости дуги s. Поэтому равенство (1) выражаетъ слѣдующую теорему: *работа постоянной силы во вращательномъ движеніи равна угловому перемѣщенію, умноженному на моментъ силы относительно оси вращенія.*

Въ нашемъ примѣрѣ направленіе силы и перемѣщенія лежали въ одной плоскости. Докажемъ теперь, что выведенная теорема

имѣетъ общій характеръ, т.-е. справедлива при всякомъ положеніи направленія силы къ перемѣщенію ея точки приложенія.

Положимъ (фиг. 109), что сила F и перемѣщеніе $s = AA'$ ея точки приложенія лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ. Дуга $s = AA'$, описанная изъ центра O, лежитъ въ плоскости MN. Прямая OZ, перпендикулярная къ этой плоскости, представляетъ ось вращенія.



Фиг. 109.

Разложимъ силу F на составляющія F_1 и F_2, изъ которыхъ первая F_1 лежала бы въ плоскости MN, а вторая F_2 была бы перпендикулярна къ этой плоскости, т.-е. параллельна оси OZ. Проведемъ изъ начальной точки A прямую AB, касательную къ дугѣ AA', и назовемъ уголъ между AB и F_1 черезъ φ. Очевидно, что работа силы F производится только ея слагающею F_1 (т. к. слагающая F_2, перпендикулярная къ перемѣщенію AA', работы не производитъ) и при томъ лишь частью ея $F_1 cos\varphi$, представляющею проекцію F_1 на направленіе AB касательной къ перемѣщенію.

Итакъ, $T = F_1 cos\varphi . s$ или, называя угловое перемѣщеніе, соотвѣтствующее дугѣ s, черезъ α и радіусъ дуги черезъ R:

$$T = F_1 cos\varphi . \alpha . R = \alpha . F_1 . R cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Опустивъ изъ центра O перпендикуляръ $OK = p$ на направленіе слагающей силы F_1 и замѣтивъ, что уголъ $AOK = \varphi$, находимъ, что $p = R\ cos\varphi$. Подставимъ это выраженіе въ равенство (2). Тогда

$$T = \alpha . F_1 . p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Произведеніе $F_1 . p$, какъ извѣстно (§ 133), есть моментъ силы F относительно оси OZ. Итакъ и въ этомъ случаѣ работа силы F равна угловому перемѣщенію на моментъ силы относительно оси вращенія, что и слѣдовало доказать.

§ 186. **Сложеніе и разложеніе работъ**. *Работа равнодѣйствующей силы равна алгебраической суммѣ работъ ея составляющихъ.* Положимъ, что точка A, на которую дѣйствуютъ силы F_1, F_2, F_3,

прошла путь $AB = s$ (фиг. 110). Найдемъ по правилу многоугольника силъ ихъ равнодѣйствующую R и назовемъ черезъ α_1, α_2, α_3 и α углы, образуемые силами F_1, F_2, F_3 и R. Тогда по теоремѣ проекцій силъ (§ 98) можемъ написать, что

Фиг. 110.

$$R cos\alpha = F_1 cos\alpha_1 + F_2 cos\alpha_2 + F_3 cos\alpha_3 \quad . \; . \; (1)$$

Умноживъ обѣ части равенства (1) на величину перемѣщенія s, получимъ:

$$R s cos\alpha = F_1 s cos\alpha_1 + F_2 s cos\alpha_2 + F_3 s cos\alpha_3 \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Но $R cos\alpha$ есть работа равнодѣйствующей, а $F_1 s cos\alpha_1$, $F_2 s cos\alpha_2$, $F_3 s cos\alpha_3$ суть работы составляющихъ. Итакъ, равенство (2) и выражаетъ нашу теорему.

Это предложеніе можно было, впрочемъ, принять и безъ доказательства на томъ основаніи, что равнодѣйствующая вполнѣ замѣняетъ слагающія силы безъ измѣненія результата ихъ совокупнаго дѣйствія.

Въ общемъ случаѣ, если данныя силы перемѣнныя, то перемѣщеніе s дѣлятъ на столь малые элементы δs, что на протяженіи каждаго изъ нихъ силы можно считать постоянными и выразить равенства элементарныхъ работъ равнодѣйствующей и ея составляющихъ для каждаго элемента пути въ отдѣльности. Суммируя затѣмъ эти равенства, получимъ выраженія для полной работы на всемъ перемѣщеніи s.

На основаніи этой теоремы производится и обратное дѣйствіе, т.-е. *разложеніе работы* на нѣсколько составляющихъ работъ. Разсмотримъ этотъ вопросъ въ общемъ видѣ.

Разложимъ по координатнымъ осямъ силу F на три составляющія X, Y и Z, а элементарное перемѣщеніе δs ея точки приложенія—на три составляющія перемѣщенія δx, δy и δz. Назовемъ уголъ, составляемый силой F съ перемѣщеніемъ δs, черезъ φ, а углы, составляемые перемѣшеніемъ δs съ осями координатъ черезъ α, β, γ. Тогда по теоремѣ сложенія работъ имѣемъ:

$$F \delta s \, cos\varphi = X \delta s \, cos\alpha + Y \delta s \, cos\beta + Z \delta s \, cos\gamma$$

или, такъ какъ $\delta s \, cos\alpha = \delta x$, $\delta s cos\beta = \delta y$, $\delta s cos\gamma = \delta z$, то

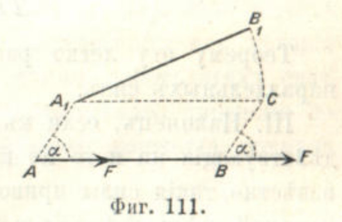
$$F \delta s \, cos\varphi = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

Полная же работа T на всемъ перемѣщеніи s будетъ:

$$T = \Sigma X\delta x + \Sigma Y\delta y + \Sigma Z\delta z.$$

§ 187. **Работа силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.** Теорема о работѣ равнодѣйствующей справедлива не только для тѣла, разсматриваемаго какъ точка, но и для всякаго абсолютно-твердаго тѣла или для неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ. Чтобы доказать это, выведемъ предварительно слѣдующую теорему:

Работа силы не измѣняется отъ перенесенія по направленію силы ея точки приложенія. Положимъ, что къ точкѣ A твердаго тѣла приложена сила F (фиг. 111). Докажемъ, что если эту силу перенесемъ въ точку B, лежащую на направленіи силы и неизмѣнно связанную съ точкой A, то при всякомъ перемѣщеніи тѣла работа силы остается та же, какъ если бы она была по прежнему приложена въ точкѣ A. Допустимъ, что черезъ нѣкоторый промежутокъ времени точка A перемѣстилась въ точку A_1, а точка B въ точку B_1, причемъ вслѣдствіе неизмѣняемости разстоянія точекъ прямая $AB =$ прямой A_1B_1. Проведемъ прямую A_1C равную и параллельную прямой AB и соединимъ прямыми точку A съ точкой A_1 и точку B съ точкой C. Фигура AA_1CB представляетъ, очевидно, параллелограммъ. Наконецъ, соединимъ точки C и B_1 дугой, описанной изъ A_1, какъ изъ центра. Работа силы F для перемѣщенія AA_1 равна $F.AA_1\cos\alpha$. Работа этой же силы, перенесенной въ точку B для перемѣщенія BB_1 состоитъ изъ работы ея на перемѣщеніи по прямой BC и работы на перемѣщеніи по дугѣ CB_1.



Фиг. 111.

Первая изъ этихъ работъ равна $F.BC\cos\alpha$, а вторая равна нулю, такъ какъ при перемѣщеніи по дугѣ CB_1 сила F, какъ нормальная къ этой дугѣ, никакой работы не производитъ. Поэтому работа для перемѣщенія BB_1 равна $F.BC\cos\alpha = F.AA_1\cos\alpha$, т.-е. равна работѣ для перемѣщенія AA_1, что и слѣдовало доказать.

§ 188. Съ помощью только что выведенной теоремы легко доказать, что *работа равнодѣйствующей сходящихся или параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, равна алгебраической суммѣ работъ этихъ силъ.*

I. Если направленіе всѣхъ силъ $F_1, F_2, F_3 \ldots$, приложенныхъ къ разнымъ точкамъ тѣла, сходятся въ одной точкѣ, то, перенеся въ нее эти силы, получимъ систему силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ и, слѣдовательно, будемъ имѣть по доказанному (§ 186), что

$$TR = \Sigma TF.$$

II. Если къ тѣлу приложены двѣ параллельныя силы P и Q, то, поступая съ ними, какъ было указано при сложеніи этихъ силъ (§ 102; фиг. 45), получимъ двѣ сходящіяся силы, равнодѣйствующая которыхъ $R = P + Q$, откуда получаемъ, что

$$TR = TP + TQ.$$

Теорему эту легко распространить для какого угодно числа параллельныхъ силъ.

III. Наконецъ, если къ тѣлу приложены силы $F_1, F_2, F_3 \ldots$, дѣйствующія на него по какимъ угодно направленіямъ, то, какъ извѣстно, такія силы приводятся къ одной равнодѣйствующей силѣ и одной равнодѣйствующей парѣ (§ 162), которыя въ свою очередь могутъ быть приведены къ двумъ силамъ, въ общемъ случаѣ не лежащимъ въ одной плоскости (§ 164. I. Примѣчаніе). Такъ какъ эти двѣ силы (назовемъ ихъ черезъ R_1 и R_2) представляютъ равнодѣйствующія данной системы силъ, то имѣетъ, что

$$TR_1 + TR_2 = \Sigma TF,$$

т.-е. *алгебраическая сумма работъ силъ, какъ угодно приложенныхъ къ тѣлу, равна суммѣ работъ двухъ силъ, къ которымъ приводятся всѣ эти силы.*

§ 189. **Работа силъ, находящихся въ равновѣсіи. Теорема.** *Если тѣло находится въ равновѣсіи, то алгебраическая сумма какъ угодно приложенныхъ къ нему силъ равна нулю.* Такъ какъ въ общемъ случаѣ система силъ $F_1, F_2, F_3 \ldots$, какъ угодно приложенныхъ къ тѣлу, приводится къ двумъ силамъ R_1 и R_2, то изъ условія равновѣсія тѣла необходимо слѣдуетъ, что эти силы взаимно уравновѣшиваются, а это возможно лишь въ томъ случаѣ, если онѣ равны и прямопротивоположны. Но въ такомъ случаѣ алгебраическая сумма работъ этихъ силъ равна нулю ($TR_1 + TR_2 = O$), а, слѣдовательно, по предыдущему, работа всѣхъ приложенныхъ къ тѣлу силъ также равна нулю, т.-е.

$$TF_1 + TF_2 + TF_3 + \ldots = O \text{ или } \Sigma TF = O.$$

Замѣтимъ, что нѣкоторые члены этого равенства представляютъ положительную, а другіе—отрицательную работу. Называя сумму членовъ перваго рода работой *движущихъ* силъ, а сумму членовъ второго рода—работой *сопротивленій*, можемъ формулировать доказанную теорему такимъ образомъ: *Если тѣло находится въ равновѣсіи, то работа движущихъ силъ равна работѣ сопротивленій.*

§ 190. **Обратная теорема.** *Если алгебраическая сумма работъ всѣхъ приложенныхъ къ тѣлу силъ относительно какого угодно перемѣщенія равна нулю, то тѣло находится въ равновѣсіи.*

Такъ какъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ силъ тѣло можетъ имѣть поступательное и вращательное движеніе, то изъ условія теоремы слѣдуетъ, что алгебраическая сумма работъ этихъ силъ должна быть равна нулю какъ для поступательнаго движенія по какой угодно оси, такъ и для вращательнаго движенія вокругъ какой угодно оси.

Положимъ, что въ теченіе нѣкотораго времени тѣло, двигаясь поступательно вдоль нѣкоторой произвольной оси, перемѣстилось на длину s. Называя проекціи приложенныхъ силъ F', F'', F''' на направленіе s через F_s', F_s'', F_s''', получимъ, что

$$F_s'.s + F_s''.s + F_s'''.s + \ldots = O \text{ или } \Sigma F_s.s = O$$

или, выводя постоянный множитель s за знакъ Σ:

$$s.\Sigma F_s = O, \text{ откуда } \Sigma F_s = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Допустимъ теперь, что тѣло во вращательномъ движеніи около нѣкоторой произвольной оси l получило въ теченіе нѣкотораго времени угловое перемѣщеніе α. Называя сумму моментовъ приложенныхъ силъ относительно оси l черезъ $\Sigma M_l F$, по доказанной уже теоремѣ (§ 185) получимъ, что $\alpha \Sigma M_l F = O$ или

$$\Sigma M_l F = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Выведенныя равенства (1) и (2) выражаютъ слѣдующую, уже извѣстную намъ изъ статики, теорему:

Свободное твердое тѣло находится въ равновѣсіи, если

1. *алгебраическая сумма проекцій всѣхъ приложенныхъ силъ на какую угодно ось равна нулю.*

2. *алгебраическая сумма моментовъ этихъ силъ относительно какой угодно оси равна нулю.*

Основныя уравненія движенія.

I. Первое основное уравненіе движенія.

§ 191. **О силѣ инерціи.** Силы происходятъ, какъ извѣстно (§§ 2 и 72), или отъ дѣйствія одного тѣла на другое, или отъ дѣйствія однѣхъ частицъ тѣла на другія частицы его. Поэтому употребительное выраженіе: „на тѣло A дѣйствуетъ сила F“ не совсѣмъ правильно, ибо въ немъ какъ бы подразумѣвается, что есть нѣкоторая, сама по себѣ существующая величина F, которая приводитъ въ движеніе тѣло A или вообще производитъ на него давленіе. Такъ какъ силы не могутъ существовать независимо и отдѣльно отъ тѣлъ, то это выраженіе слѣдуетъ понимать въ томъ смыслѣ, что на тѣло A дѣйствуетъ съ силой F нѣкоторое другое тѣло B. Но если тѣло B дѣйствуетъ съ силой F по нѣкоторому направленію на тѣло A, то и обратно, по закону дѣйствія и противодѣйствія, тѣло A дѣйствуетъ на тѣло B съ такой же точно силой F, но по прямо противоположному направленію. Эта послѣдняя сила, идущая отъ тѣла A къ тѣлу B и представляющая какъ бы сопротивленіе движенію тѣла A, если оно ранѣе было въ покоѣ, или сопротивленіе измѣненію его движенія, если оно ранѣе двигалось, называется *силой инерціи* тѣла A. Дѣйствіе силы инерціи, очевидно, проявляется лишь при измѣненіи его скорости.

Положимъ, что на обыкновенномъ пружинномъ безменѣ A (Фиг. 32) подвѣшенъ грузъ P. Вслѣдствіе сжатія пружины стержень безмена выйдетъ изъ трубки и остановится на нѣкоторомъ дѣленіи, соотвѣтствующемъ вѣсу тѣла P. Если затѣмъ мы станемъ медленно и равномѣрно поднимать безменъ съ грузомъ, то не замѣтимъ никакой перемѣны въ положеніи стержня, но если быстро дернемъ его вверхъ, то увидимъ, что стержень еще

выдвинется изъ трубки на нѣкоторую длину, притомъ тѣмъ бо́льшую, чѣмъ быстрѣе будемъ поднимать безменъ. Сила, увеличивающая сжатіе пружины и вслѣдствіе этого выдвигающая стержень, и есть *сила инерціи* груза P, т.-е. то противодѣйствіе, которое онъ оказываетъ силѣ руки, стремящейся вывести его изъ первоначальнаго положенія (покоя или движенія).

Сила F, производящая движеніе тѣла P, какъ извѣстно, равна $m.a$, гдѣ m—масса, a—ускореніе тѣла P. Поэтому сила инерціи тѣла P (какъ равная и противоположная силѣ F) равна—ma. Отсюда находимъ, что если ускореніе есть постоянная величина, т.-е. если тѣло находится въ равномѣрно-ускоренномъ или равномѣрно-замедленномъ движеніи, то сила инерціи его есть постоянная величина. Это можно провѣрить слѣдующимъ простымъ опытомъ. Перекинемъ черезъ неподвижный блокъ шнурокъ, къ одному концу котораго подвѣшенъ безменъ съ грузомъ P, а къ другому концу такой грузъ Q, чтобы вѣсъ его былъ болѣе вѣса безмена съ грузомъ. Тогда грузъ Q, падая, приведетъ всю систему тѣлъ въ равномѣрно-ускоренное движеніе. При этомъ во все время движенія стержень безмена будетъ выдвинутъ на одну и ту же дополнительную длину за чертой, соотвѣтствующей вѣсу тѣла P. Увеличивъ грузъ Q, мы тѣмъ самымъ увеличимъ и ускореніе тѣла P и замѣтимъ, что стержень безмена выдвинется еще дальше, такъ какъ сила инерціи тѣла P увеличилась.



Фиг. 32.

§ 102. **Основное уравненіе движенія.** Положимъ, что къ свободному тѣлу, разсматриваемому какъ матеріальная точка, приложены силы F_1, F_2, F_3,. . . Назвавъ равнодѣйствующую этихъ силъ черезъ R, ускореніе, сообщаемое тѣлу, черезъ a и массу тѣла черезъ m, имѣемъ извѣстное равенство $R = ma$ или, перенеся члены

$$R - ma = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Но величина—ma, согласно предыдущему, есть ничто иное какъ *сила инерціи* даннаго тѣла. Поэтому уравненіе (1) выражаетъ, что во всякій моментъ движенія равнодѣйствующая всѣхъ при-

ложенныхъ силъ и сила инерціи тѣла равны и противоположны, или иначе, что эти двѣ силы какъ бы взаимно уравновѣшиваются. Въ дѣйствительности этого равновѣсія не существуетъ, такъ какъ сила инерціи не приложена къ данному тѣлу, тѣмъ не менѣе на основаніи уравненія (1) мы можемъ высказать слѣдующее замѣчательное положеніе:

Всякое свободное тѣло, находящееся въ какомъ угодно движеніи, можно считать находящимся во всякій моментъ въ равновѣсіи, если только, кромѣ всѣхъ дѣйствующихъ на него силъ, принимать во вниманіе еще и его силу инерціи.

Уравненіе (1) называется *основнымъ уравненіемъ движенія*, такъ какъ съ помощью его, зная силы, дѣйствующія на тѣло, можемъ опредѣлить ускореніе, а по ускоренію скорость и пространство, *) проходимое тѣломъ въ теченіе произвольнаго времени t. Точно также и обратно, зная ускореніе тѣла, по уравненію (1) можемъ опредѣлить равнодѣйствующую R приложенныхъ къ нему силъ.

Если спроектируемъ равнодѣйствующую R и ускореніе a на три взаимно-перпендикулярныя оси OX, OY и OZ и назовемъ соотвѣтствующія проекціи черезъ X, Y и Z, a_x, a_y и a_z, то, на основаніи уравненія (1), будемъ имѣть три равенства:

$$X - ma_x = 0;\ Y - ma_y = 0;\ Z - ma_z = 0, \quad . \ . \ . \ (2)$$

представляющія уравненія движеній проекцій тѣла, разсматриваемаго какъ точка, на три оси координатъ.

II. Уравненіе количествъ движенія.

§ 193. Изъ перваго основного уравненія выводятся два другихъ уравненія движенія: уравненіе количествъ движенія и уравненіе живыхъ силъ, устанавливающія зависимости между силой, дѣйствующей на тѣло, временемъ ея дѣйствія, массою тѣла, скоростью и величиной пройденнаго пути.

---

*) Опредѣленіе скорости и пройденнаго пространства по извѣстному ускоренію представляетъ въ общемъ случаѣ задачу интегральнаго исчисленія. При помощи элементарной математики эти вопросы рѣшаются лишь въ простѣйшихъ случаяхъ, напр., для равномѣрно-перемѣнныхъ движеній.

Положимъ, что къ тѣлу, масса котораго m, движущемуся съ постоянной скоростью v_0, приложена постоянная сила F, по направленію совпадающая съ направленіемъ движенія. Подъ дѣйствіемъ этой силы тѣло придетъ въ равноускоренное движеніе и, спустя t секундъ, скорость его будетъ: $v = v_0 + at$, откуда $a = \frac{v - v_0}{t}$. Подставивъ это значеніе a въ основное уравненіе движенія $F = ma$, получимъ $F = \frac{m(v - v_0)}{t}$ или

$$Ft = mv - mv_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Произведеніе Ft называется *импульсомъ* *) *силы*, а произведеніе mv—*количествомъ движенія*. Сообразно съ значеніемъ v, будемъ называть mv_0 —*начальнымъ*, а mv—*конечнымъ количествомъ движенія*, разность же $mv - mv_0$—*измѣненіемъ количества движенія*.

Замѣтимъ, что количество движенія тѣла можетъ какъ увеличиваться, такъ и уменьшаться въ зависимости отъ направленія силы къ движенію. Если сила F будетъ противоположна направленію тѣла, движущагося со скоростью v_0, то тѣло будетъ двигаться равно-замедленно, при чемъ его начальное количество движенія mv_0 не увеличится, а уменьшится. Если черезъ t_1 секундъ скорость тѣла будетъ: $v_1 = v_0 - at_1$, то, какъ легко вывести, уравненіе (3) приметъ видъ: $Ft_1 = mv_0 - mv_1$.

Выведенное второе основное уравненіе движенія называется *уравненіемъ количествъ движенія* и читается такъ: *Импульсъ силы за нѣкоторой промежутокъ времени равенъ измѣненію количества движенія тѣла за то же самое время.*

§ 104. Если сила дѣйствуетъ подъ угломъ къ движенію тѣла, то, разложивъ ее на двѣ составляющія: одну по направленію движенія, а другую перпендикулярную къ нему, найдемъ, что только первая составляющая измѣняетъ количество движенія тѣла. Дѣйствительно, ускореніе, сообщаемое первой силой, какъ совпадающее съ направленіемъ движенія, измѣняетъ величину скорости, а слѣдовательно и количество движенія тѣла; ускореніе же второй слагающей силы измѣняетъ только направленіе скорости и поэтому не вліяетъ на измѣненіе количества движенія.

*) Отъ латинскаго слова impulsus — толчекъ.

§ 195. Если тѣло первоначально находилось въ покоѣ, то, положивъ $v_0 = O$, найдемъ, что уравненіе (3) приметъ видъ

$$Ft = mv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

т.-е. *импульсъ силы, приложенной въ теченіе нѣкотораго времени къ покоющемуся тѣлу, равенъ количеству движенія, пріобрѣтенному этимъ тѣломъ за то же самое время.*

Изъ уравненія (4) можемъ вывести два замѣчательныя слѣдствія:

1. Для сообщенія массѣ m нѣкоторой скорости v посредствомъ силы F необходимо, чтобы эта сила дѣйствовала на тѣло нѣкоторое время t, т.-е. *вполнѣ мгновенныхъ силъ не существуетъ.* При этомъ, чѣмъ меньше времени будетъ дѣйствовать сила, тѣмъ она должна быть больше и наоборотъ.

Этимъ объясняется, почему рвется нить, на которой виситъ тѣло, если ее очень быстро дернуть вверхъ: мы стремимся придать тѣлу очень большую скорость въ теченіе очень малаго времени, для чего необходимо приложить къ тѣлу сравнительно очень большую силу. Эта именно сила и разрываетъ нить. Поэтому, чтобы остановить плывущее судно канатомъ, привязаннымъ къ неподвижному тѣлу, надо укрѣплять другой конецъ каната на суднѣ не сразу, тѣмъ можетъ быть разорванъ канатъ, а постепенно, благодаря чему уменьшается тяга судна.

2. Если къ двумъ покоющимся тѣламъ, массы которыхъ m_1 и m_2, приложимъ на одно и то же время t двѣ силы: силу F_1 къ одному и силу F_2 къ другому тѣлу, то, называя скорости тѣлъ въ концѣ времени t черезъ v_1 и v_2, будемъ имѣть, что $F_1 t = m_1 v_1$ и $F_2 t = m_2 v_2$. Раздѣливъ почленно одно уравненіе на другое, получимъ

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2},$$

т.-е. *отношеніе постоянныхъ силъ равно отношенію количествъ движенія, сообщенныхъ ими тѣламъ за одно и то же время.* Если при этомъ $F_1 = F_2$, то $m_1 v_1 = m_2 v_2$, откуда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$, т.-е. *скорости, сообщенныя двумъ тѣламъ равными силами* (или одной и той же силой), *дѣйствовавшими въ теченіе одинаковаго времени, обратно пропорціональны массамъ этихъ тѣлъ.*

При выстрѣлѣ изъ ружья или пушки взрывъ пороховыхъ газовъ внутри ствола дѣйствуетъ во всѣ стороны съ одинаковой силой. Равныя и противоположныя поперечныя давленія газовъ на стѣнки ствола уничтожаются сопротивленіемъ стѣнокъ. Изъ двухъ же равныхъ и противоположныхъ давленій вдоль ствола одно выталкиваетъ пулю или ядро, а другое дѣйствуетъ на дно ствола и тѣмъ производитъ такъ называемую *отдачу*, толкающую ружье или пушку въ направленіи противоположномъ выстрѣлу. Количества движенія, сообщенныя пулѣ и ружью, равны между собой, но скорости этихъ тѣлъ обратно пропорціональны ихъ массамъ.

Дѣйствуя на тѣло сравнительно небольшой силой, но въ теченіи достаточно продолжительнаго времени, мы можемъ сообщить тѣлу такое количество движенія, которое позволитъ ему преодолѣть значительное сопротивленіе въ малый промежутокъ времени. Такъ, напр., движеніемъ и затѣмъ ударомъ молотка мы вбиваемъ гвоздь, при чемъ преодолѣваемъ очень большое сопротивленіе въ теченіе очень малаго времени.

§ 196. Если на тѣло въ теченіи времени t дѣйствуетъ перемѣнная сила F, то раздѣлимъ время t на столь большое число малыхъ промежутковъ $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$, чтобы силы, дѣйствующія въ теченіе каждаго изъ нихъ, можно было считать постоянными. Назвавъ эти силы соотвѣтственно промежуткамъ времени черезъ $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$; скорости тѣла въ началѣ и концѣ каждаго промежутка черезъ $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, а массу тѣла черезъ m, напишемъ рядъ уравненій количествъ движенія для каждаго промежутка времени:

$$F_1 t_1 = mv_1 - mv_0$$
$$F_2 t_2 = mv_2 - mv_1$$
$$F_3 t_3 = mv_3 - mv_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n t_n = mv_n - mv_{n-1}$$

Сложивъ почленно эти уравненія и замѣтивъ, что всѣ члены вторыхъ частей взаимно уничтожаются кромѣ двухъ, получимъ

$$F_1 t_1 + F_2 t_2 + F_3 t_3 + \ldots F_n t_n = mv_n - mv_0 \ldots\ldots \quad (5)$$

Называя произведенія $F_1 t_1$, $F_2 t_2 \ldots$ элементарными импульсами силъ, уравненіе (5) прочтемъ такимъ образомъ:

Сумма элементарныхъ импульсовъ перемѣнной силы, дѣйствовавшихъ на тѣло въ теченіе нѣкотораго времени, равна измѣненію количества движенія тѣла за то же самое время.

Уравненіе живыхъ силъ.

§ 197. Положимъ, что къ свободной матеріальной точкѣ (или къ тѣлу, разсматриваемому какъ точка), имѣвшей начальную скорость v_0, приложена по направленію движенія постоянная сила F, подъ дѣйствіемъ которой точка прошла путь s и въ концѣ его пріобрѣла скорость v. Движеніе точки, какъ извѣстно, будетъ равноускоренное, при чемъ $s=\frac{v^2-v^2_0}{2a}$. Опредѣливъ отсюда $a=\frac{v^2-v_0{}^2}{2s}$ и, подставивъ это значеніе въ основное уравненіе $F=ma$, получимъ $F=\frac{m(v^2-v_0{}^2)}{2s}$

или $$Fs=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0{}^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Выраженіе $\frac{mv^2}{2}$ называется *живою силой точки въ конечный моментъ движенія*, $\frac{mv_0{}^2}{2}$ — *живой силой въ начальный моментъ*; разность $\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0{}^2}{2}$ означаетъ *измѣненіе живой силы точки* за промежутокъ времени, соотвѣтствующій пройденному пути s; наконецъ произведеніе Fs, очевидно, представляетъ *механическую работу силы* за тотъ же промежутокъ времени.

Въ разсмотрѣнномъ случаѣ живая сила точки получила приращеніе $\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0{}^2}{2}$. Если бы сила F дѣйствовала на точку на протяженіи пути s по направленію противоположному движенію, то точка двигалась бы равно-замедленно и конечная скорость ея v_1 была бы меньше начальной скорости v_0. Уравненіе живыхъ силъ въ этомъ случаѣ приметъ видъ: $Fs_1=\frac{mv_0{}^2}{2}-\frac{mv_1{}^2}{2}$. Живая

сила точки уменьшилась, такъ что разность $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$ означаетъ здѣсь величину *утраченной* живой силы.

Уравненіе (6), имѣющее, какъ увидимъ далѣе, вполнѣ общій характеръ, есть третье основное уравненіе движенія и называется *уравненіемъ живыхъ силъ* *). Оно читается такъ: *Работа силы, дѣйствовавшей на точку на протяженіи нѣкотораго пути, равна измѣненію живой силы точки за время этого перемѣщенія.*

§ 198. Теорему живыхъ силъ не трудно распространить на случай дѣйствія постоянной силы подъ нѣкоторымъ угломъ къ направленію движенія, а также и на общій случай дѣйствія *перемѣнной* силы.

I. Если постоянная сила F дѣйствуетъ на точку подъ угломъ α къ направленію ея движенія, то, разложивъ силу на слагающія: F_1 по направленію движенія и F_2 по направленію перпендикулярному къ движенію, замѣтимъ, что вторая слагающая сила F_2 не производитъ никакой работы, а также не измѣняетъ величины скорости точки, а слѣдовательно и ея живой силы. Поэтому какъ работа силы F, такъ и увеличеніе живой силы точки производятся исключительно составляющей силой $F_1 = F\cos\alpha$, *дѣйствующей по направленію движенія* (или по прямо-противоположному направленію, если уголъ α — тупой), но этотъ случай былъ уже разсмотрѣнъ. Итакъ, называя по прежнему путь точки черезъ s, массу точки черезъ m, а ея начальную и конечную скорость черезъ v_0 и v, будемъ имѣть

$$Fs\cos\alpha = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

---

*) Уравненіе живыхъ силъ можетъ быть выведено также изъ уравненія количествъ движенія $Ft = m(v - v_0)$ . . . (A). Замѣтивъ, что въ равномѣрно-перемѣнномъ движеніи $s = \frac{v + v_0}{2} t$, откуда $t = \frac{2s}{v + v_0}$, подставимъ это значеніе t въ уравненіе (A). Тогда получимъ $F . \frac{2s}{v + v_0} = m(v - v_0)$, или $F 2s = m(v^2 - v_0^2)$, или $Fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Названіе (не вполнѣ удачное) *живая сила* было впервые дано *Лейбницемъ* (**1646—1716**), который измѣрялъ силу ея работой и называлъ силу, не производящую работы (или движенія), *мертвой силой*.

II. Если на точку дѣйствуетъ *перемѣнная* сила F, то раздѣлимъ путь s точки на столь малые элементы $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$, чтобы на протяженіи каждаго изъ нихъ дѣйствующую силу можно было бы считать постоянной и соотвѣтственно равной F_1, F_2, $F_3, \ldots F_n$. Называя начальную скорость точки черезъ v_0, конечныя скорости черезъ $v_1, v_2, v_3, \ldots v$, а работы силы на элементахъ пути черезъ $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$, можемъ написать, на основаніи предыдущаго, рядъ равенствъ:

$$T_1 = \frac{mv_1^{\,2}}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2}$$

$$T_2 = \frac{mv_2^{\,2}}{2} - \frac{mv_1^{\,2}}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_3 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2_{n-1}}{2}$$

Суммируя эти равенства и сокративъ подобные члены, получимъ

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots T_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2} \text{ или,}$$

замѣтивъ, что сумма элементарныхъ работъ $T_1 + T_2 + \ldots T_n = T$, т.-е. полной работѣ перемѣнной силы на пути s:

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2}.$$

§ 199. Если на точку дѣйствуетъ нѣсколько силъ F_1, F_2, $F_3 \ldots$, то, сложивъ ихъ въ одну равнодѣйствующую R, на основаніи предыдущаго напишемъ равенство $TR = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2}$ или, такъ какъ работа TR равнодѣйствующей равна алгебраической суммѣ работъ ΣTF составляющихъ, то имѣемъ

$$\Sigma TF = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2}, \text{ т.-е.}$$

алгебраическая сумма работъ силъ, дѣйствующихъ на точку на протяженіи нѣкотораго пути, равна измѣненію живой силы этой точки, происшедшему за время этого перемѣщенія.

§ 200. **Изслѣдованіе уравненія живыхъ силъ.** Разложимъ алгебраическую сумму работъ ΣTF силъ, дѣйствующихъ на точку, на двѣ суммы: на сумму работъ ΣT_1 *движущихъ силъ*, составляющихъ острые углы съ направленіемъ движенія и, слѣдовательно, производящихъ *положительную* работу, и на сумму работъ ΣT_2 *сопротивленій* или силъ, составляющихъ тупые углы съ направленіемъ движенія и производящихъ *отрицательную* работу. Тогда уравненіе живыхъ силъ приметъ слѣдующій видъ:

$$\Sigma T_1 - \Sigma T_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad (a).$$

I. Если $v > v_0$, т.-е. если точка имѣетъ *ускоренное* движеніе, то обѣ части уравненія (a) положительны и, слѣдовательно, происходящее при этомъ *приращеніе живой силы* точки $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ *равно избытку работы движущихъ силъ надъ работою сопротивленій.*

Если точка первоначально находилась въ покоѣ, то, положивъ въ уравненіи (a) $v_0 = O$, получимъ, что $\Sigma T_1 - \Sigma T_2 = \frac{mv^2}{2}$, т.-е. *пріобрѣтенная точкой живая сила равна избытку работъ движущихъ силъ надъ работой сопротивленій.*

II. Если $v < v_0$, т.-е. если точка имѣетъ *замедленное* движенію, то обѣ части уравненія (a) отрицательны. Отрицательная величина $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ означаетъ величину *потерянной* живой силы точки. Какъ видно изъ уравненія (a), она равна отрицательной величинѣ $\Sigma T_1 - \Sigma T_2$, т.-е. *потерянная живая сила точки равна избытку работы сопротивленій надъ работой движущихъ силъ.*

Все уменьшающаяся скорость v точки наконецъ обратится въ нуль, т.-е. точка остановится. Въ этомъ случаѣ уравненіе (a) приметъ видъ $\Sigma T_2 - \Sigma T_1 = \frac{mv_0^2}{2}$, или, обозначивъ разность $\Sigma T_2 - \Sigma T_1$, т.-е. избытокъ работы сопротивленій черезъ $\Sigma T'$, получимъ

$$\Sigma T' = \frac{mv_0^2}{2}$$

Итакъ, *точка остановится, когда избытокъ работы сопротивленій будетъ равенъ начальной живой силѣ точки.*

III. Наконецъ, если $v = v_0$, т.-е. если точка движется *равномѣрно*, то обѣ части уравненія обращаются въ нули. Такимъ образомъ *при равномѣрномъ движеніи точки работа движущихъ силъ уравновѣшивается работой сопротивленій или* иначе *алгебраическая сумма работъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, равна нулю.* Вслѣдствіе этого говорятъ, что равномѣрно-движущіяся точки или тѣла находится въ состояніи *динамическаго равновѣсія.*

Живая сила точки или тѣла остается въ этомъ случаѣ безъ измѣненія.

§ 201. Такъ какъ живая сила всегда можетъ быть выражена въ единицахъ работы (дѣйствительно: $\frac{mv^2}{2} = \frac{P}{g}\frac{v^2}{2} = P\frac{v^2}{2g} = Ph$), то изъ приведеннаго изслѣдованія уравненія живыхъ силъ можемъ окончательно заключить, что *во всякомъ ускоренномъ движеніи израсходованная работа переходитъ въ живую силу точки или тѣла и наоборотъ, во всякомъ замедленномъ движеніи пріобрѣтенная ранѣе живая сила переходитъ въ работу,* при чемъ *взаимно-преобразованныя работа и живая сила всегда равны между собою.*

Какъ извѣстно, величина работы вѣса падающаго тѣла зависитъ только отъ разности уровней его начальнаго и конечнаго положенія и нисколько не зависитъ отъ вида и длины траекторіи движенія. Отсюда знаменитый голландскій ученый *Христіанъ Гюйгенсъ* вывелъ, что *конечная скорость тѣла, падающаго по какой угодно наклонной прямолинейной или криволинейной траекторіи, равна конечной скорости тѣла свободно падающаго съ такой же высоты.* Дѣйствительно, для каждаго изъ этихъ движеній справедливо уравненіе живыхъ силъ

$$\frac{mv^2}{2} = Ph \text{ или } \frac{mv^2}{2} = mgh, \text{ откуда } v = \sqrt{2gh},$$

но это значеніе v выражаетъ величину скорости при свободномъ паденіи съ высоты h, что и слѣдовало доказать. Это свойство тѣлъ, падающихъ по наклонной траекторіи, остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если тѣло двигается съ начальной скоростью, что не

трудно провѣрить. Замѣтимъ, что времена, въ которыя тѣло проходитъ эти различныя траекторіи, будутъ, очевидно, различны. Швейцарскій ученый *Иванъ Бернулли* доказалъ, что кривая, двигаясь по которой тѣло опускается въ кратчайшее время съ произвольной высоты, есть *циклоида*, вслѣдствіе чего и назвалъ ее *брахистохроной* *).

Точно такимъ же образомъ съ помощью теоремы живыхъ силъ легко доказать, что тяжелое тѣло, поднимающееся съ начальной скоростью v_0 вверхъ (безъ тренія) по наклонной траекторіи произвольнаго вида, достигаетъ такой же высоты, какъ если бы оно было брошено вертикально вверхъ.

Примѣры опредѣленія движенія свободныхъ тѣлъ.

§ 202. **Вертикальное паденіе. Машина Атвуда.** Въ кинематикѣ были подробно изложены законы паденія тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ. Тѣла падаютъ *равно-ускоренно*, причемъ ускореніе падающихъ тѣлъ, независимо отъ ихъ вѣса, величины и формы, всегда одно и то же, а именно $g = 32{,}2$ фунта $= 9{,}8$ метра. Отсюда на основаніи законовъ динамики заключаемъ, что сила тяжести постоянна и дѣйствуетъ одинаково на каждую частицу тѣла.

Такъ какъ ускореніе g представляетъ довольно большую величину, вслѣдствіе чего повѣрка законовъ паденія прямымъ путемъ затруднительна, то англійскій ученый Атвудъ устроилъ машину, съ помощью которой ускореніе падающихъ тѣлъ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ и, слѣдовательно, легко наблюдаемымъ.

Приборъ Атвуда подробно описывается въ каждомъ учебникѣ физики, поэтому здѣсь мы изложимъ лишь основную идею ея. Вообразимъ, что черезъ неподвижный блокъ перекинута нить, незначительнымъ вѣсомъ которой можно пренебречь. Если къ концамъ нити подвѣсимъ двѣ равныя гири, по P граммовъ каждая, то, очевидно, онѣ при любомъ своемъ положеніи останутся въ равновѣсіи. Если же къ одной изъ нихъ прибавимъ хотя небольшой добавочный грузъ въ p граммовъ, то эта гиря будетъ

---

*). Отъ греческихъ словъ *brachistos*—кратчайшій и *chronos*—время.

падать съ нѣкоторымъ постояннымъ ускоренiемъ, а другая гиря будетъ подниматься съ тѣмъ же самымъ ускоренiемъ.

Докажемъ, что это ускоренiе можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ. Отъ вѣса малой гирьки p въ приборѣ движутся три гири, общiй вѣсъ которыхъ $= 2P + p$. Если бы гирька p падала одна, то ускоренiе ея было бы $= g$, но такъ какъ теперь она связана въ одну систему съ двумя другими тѣлами, то ускоренiе ея будетъ другое. Назовемъ его черезъ a. Такъ какъ, при дѣйствiи одной и той же силы на тѣла различныхъ массъ или различнаго вѣса, ускоренiя, сообщаемыя силой, обратно пропорцiональны массамъ или вѣсамъ, то имѣемъ

$$\frac{a}{g} = \frac{p}{2P+p}, \text{ откуда } a = g\frac{p}{2P+p}.$$

Если, напр., $P = 240$ грам. и $p = 10$ грам., то $a = 9{,}8\frac{10}{490} =$ $= 20$ сантим. Помощью машины Атвуда легко повѣряются законы свободнаго паденiя тѣлъ:

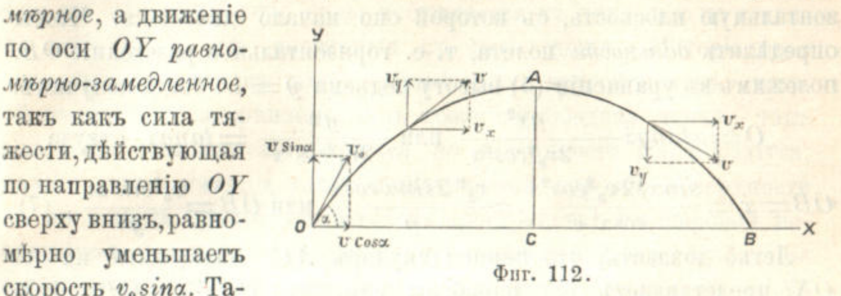
1. Пространство, проходимое въ 1-ую секунду, равно половинѣ ускоренiя.

2. Пространства, проходимыя въ 1, 2, 3....сек., пропорцiональны квадратамъ временъ ($S_1 : S_2 : S_3 \ldots = 1^2 : 2^2 : 3^2 \ldots$).

3. Скорости въ концѣ 1-ой, 2-ой, 3-ьей секунды пропорцiональны временамъ ($V_1 : V_2 : V_3 \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$).

203. **Движенiе тѣла, брошеннаго наклонно къ горизонту.** Положимъ, что нѣкоторое тѣло, разсматриваемое какъ точка, было брошено (въ безвоздушномъ пространствѣ) съ начальной скоростью v_0 подъ угломъ α къ горизонту. Если бы на тѣло не дѣйствовали никакiя силы, то, по закону инерцiи, оно двигалось бы равномѣрно и прямолинейно, сохраняя величину и направленiе своей начальной скорости. Но такъ какъ въ дѣйствительности на тѣло все время дѣйствуетъ постоянная сила тяжести, измѣняющая скорость его по величинѣ и направленiю, то не трудно заключить, что разсматриваемое движенiе будетъ *перемѣнное* и *криволинейное*. Чтобы опредѣлить обстоятельства этого движенiя, проведемъ изъ начальнаго положенiя O тѣла (фиг. 112) въ плоскости его движенiя двѣ оси координатъ, горизонтальную OX и вертикальную OY и разложимъ по нимъ начальную скорость v_0 на составляющiя $v_0 cos\alpha$ и $v_0 sin\alpha$.

Разсматривая движеніе тѣла, какъ сложное изъ двухъ движеній его по осямъ, видимъ, что движеніе по оси OX есть *равномѣрное*, а движеніе по оси OY *равномѣрно-замедленное*, такъ какъ сила тяжести, дѣйствующая по направленію OY сверху внизъ, равномѣрно уменьшаетъ скорость $v_0 sin\alpha$. Таkимъ образомъ по истеченіи нѣкотораго времени t скорости слагающихъ движеній будутъ: $v_x = v_0 cos\alpha$. (1) и $v_y = v_0 \ sin\alpha - gt$ (2), а пройденныя пространства:



Фиг. 112.

$$x = v_0 cos\alpha . t \ldots\ldots \quad (3) \quad \text{и} \quad y = v_0 sin\alpha . t - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots (4).$$

Опредѣливъ изъ уравненія (3) $t = \frac{x}{v_0 \ cos\alpha}$ и подставивъ это значеніе въ уравненіе (4), получимъ

$$y = x tang\alpha - \frac{gx^2}{2v_0{}^2 cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Это уравненіе, какъ не заключающее величины t и выражающее аналитическую зависимость между координатами x и y движущагося тѣла, представляетъ *траекторію* движенія, а именно *параболу*, такъ какъ въ немъ одна перемѣнная величина (y) содержится въ первой степени, а другая (x) — во второй.

Тѣло будетъ подниматься вверхъ, пока его вертикальная слагающая скорость v_y не обратится въ нуль. Въ этомъ случаѣ изъ уравненія (2) имѣемъ: $O = v_0 sin\alpha - gt$, откуда $t = \frac{v_0 sin\alpha}{g}$.

Подставивъ это значеніе t въ уравненіе (4), опредѣлимъ *высоту* полета AC:

$$y = AC = \frac{v_0{}^2 sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0{}^2 sin^2\alpha}{2g} \quad \text{или} \quad AC = \frac{v_0{}^2 sin^2\alpha}{2g} \quad \ldots (6).$$

Достигнувъ этой высоты, тѣло будетъ опускаться внизъ, описывая другую симметричную часть той же параболы. Это видно изъ того, что знакъ скорости v_y перемѣняется, а слѣдовательно,

перемѣняется и ея направленіе, скорость же v_x остается безъ измѣненія. Наконецъ, тѣло упадетъ въ точкѣ B на ту же горизонтальную плоскость, съ которой оно начало двигаться. Чтобы опредѣлить *дальность* полета, т.-е. горизонтальное разстояніе OB, положимъ въ уравненіи (5) высоту подъема $y = O$. Тогда получимъ:

$$O = x tang\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} \text{ или } \frac{gx}{2v_0^2 cos^2\alpha} = tang\alpha, \text{ откуда}$$

$$OB = x = \frac{sin\alpha . 2v_0^2 cos^2\alpha}{cos\alpha . g} = \frac{v_0^2 2 sin\alpha \, cos\alpha}{g} \text{ или } OB = \frac{v_0^2 sin\, 2\alpha}{g} \quad \ldots (7).$$

Легко доказать, что перпендикуляръ AC, опущенный на ось OX, представляетъ *ось* параболы или, что $OC = \frac{1}{2} OB$. Дѣйствительно, подставивъ въ уравненіе (3) значеніе t, соотвѣтствующее высотѣ AC полета, т.-е. $t = \frac{v_0 \, sin\alpha}{g}$, находимъ, что

$$X = OC = \frac{v_0^2 sin\alpha \, cos\alpha}{g} = \frac{1}{2} OB.$$

Итакъ, прямая AC есть ось, а точка A — вершина параболы. Скорость тѣла въ произвольный моментъ его движенія опредѣляется формулой:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gt\, v_0 sin\alpha}.$$

Какъ видно изъ формулъ (6) и (7), при данной начальной скорости *наибольшая высота* полета тѣла получится при $\alpha = 90^0$, т.-е при вертикальномъ восхожденіи, а *наибольшая дальность* полета при $2\alpha = 90^0$ или при $\alpha = 45^0$. При углахъ $45^0 + \varphi$ и $45^0 - \varphi$ (гдѣ φ — произвольный уголъ) дальность полета одинакова, такъ какъ $sin\,(90^0 + 2\varphi) = sin\,(90^0 - 2\varphi)$.

Несвободное движеніе.

§ 204. Изложенныя до сихъ поръ обстоятельства движенія въ зависимости отъ производящихъ его силъ относились къ свободной матеріальной точкѣ или къ свободному тѣлу, разсматриваемому какъ точка. Движенія такихъ точекъ или тѣлъ называются *свободными*. Такъ говорятъ: свободное вертикальное паденіе тяжелыхъ тѣлъ, свободное движеніе брошенныхъ тѣлъ, свободное движеніе небесныхъ свѣтилъ и т. д. Но не трудно видѣть, что такія свободныя движенія въ дѣйствительности происходятъ сравнительно въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ твердомъ тѣлѣ, напр., каждая матері-

альная точка неизмѣнно связана съ другими точками этого тѣла. Движенiе ея не можетъ быть свободнымъ, такъ какъ при дѣйствiи на нее какой-либо силы побуждается къ движенiю не только она одна, но и всѣ связанныя съ нею точки. Матерiальная точка, привязанная къ концу гибкой нити, другой конецъ которой неподвижно закрѣпленъ, есть тоже несвободная точка, такъ какъ, имѣя возможность двигаться по поверхности шара радiуса, равнаго длинѣ нити, а также и внутри этой шаровой поверхности она не можетъ однако двигаться въ пространствѣ за шаровой поверхностью. Точно также точка будетъ несвободной, если вслѣдствiе какихъ-либо связей или препятствiй она можетъ двигаться только по нѣкоторой линiи или по нѣкоторой поверхности и т. п. Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы будемъ имѣть такъ называемое *несвободное движенiе*.

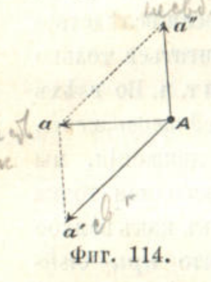
Разсматривая различные случаи несвободнаго движенiя, мы замѣчаемъ въ нихъ ту общую особенность, что несвободная точка или тѣло движется иначе, чѣмъ свободная, или (такъ какъ всякое движенiе характеризуется своимъ ускоренiемъ), что *при дѣйствiи однѣхъ и тѣхъ же силъ ускоренiе несвободной точки будетъ иное, чѣмъ ускоренiе свободной точки*.

Если, напр., матерiальную точку A (маленькiй шарикъ, гирьку и т. п.), привязанную къ концу нити, другой конецъ O которой неподвижно укрѣпленъ (фиг. 113), толкнемъ по горизонтальному направленiю съ силой F, то увидимъ, что она пойдетъ не по прямой AB, совпадающей съ направленiемъ силы, а по дугѣ AA', описанной радiусомъ, равнымъ длинѣ нити. Ускоренiе этой точки будетъ не постоянная величина $a = \frac{F}{m}$, гдѣ m — масса точки, а нѣкоторая другая, при томъ перемѣнная величина. Точно также, если, не уменьшая длины нити, мы отведемъ разсматриваемую точку въ положенiе A' и затѣмъ отпустимъ ее безъ всякаго толчка, то увидимъ, что точка не будетъ свободно падать по вертикали съ постояннымъ ускоренiемъ $g = 9{,}8$ м., а опишетъ дугу $A'A''$, при чемъ ускоренiе будетъ измѣняться въ каждый моментъ времени. Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ простой математическiй маятникъ. Подобныхъ примѣровъ можно безъ затрудненiя привести очень много.

Фиг. 113.

§ 205. Положимъ, что подъ дѣйствiемъ нѣкоторой силы F не-

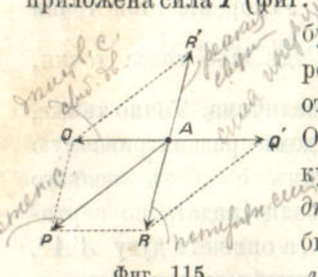
свободная точка A (фиг. 114) имѣетъ въ разсматриваемый моментъ дѣйствительное ускореніе a, между тѣмъ какъ если бы она была свободна, то имѣла бы другое ускореніе $a' = \frac{F}{m}$. Въ такомъ случаѣ можно заключить, что точка, вслѣдствіе того, что она несвободна, т.-е. стѣснена въ своемъ движеніи нѣкоторыми связями, имѣетъ въ разсматриваемый моментъ еще ускореніе (отрицательное или замедленіе) a'', которое, геометрически складываясь съ ускореніемъ a' свободной точки, даетъ въ результатѣ дѣйствительное ускореніе a. Но ускореніе a'', которое такимъ образомъ всегда легко найти разложеніемъ дѣйствительнаго ускоренія a, есть, очевидно, слѣдствіе дѣйствія на нашу точку нѣкоторой силы, равной ma'' и имѣющей направленіе этого ускоренія. Итакъ, связи, дѣлающія движеніе точки несвободнымъ, всегда можно разсматривать какъ силы, величину и направленіе которыхъ можно опредѣлить.



Фиг. 114.

§ 206. **Начало д'Аламбера**, къ доказательству котораго мы приступаемъ, представляетъ одно изъ самыхъ важныхъ обобщеній механики. Этотъ принципъ, названный по имени французскаго ученаго, опубликовавшаго его въ 1743 году, объединяетъ статику (науку о равновѣсіи) съ динамикой (наукой о движеніи) и служитъ однимъ изъ наиболѣе употребительныхъ методовъ для рѣшенія вопросовъ, относящихся къ несвободному движенію.

Допустимъ, что къ несвободной точкѣ A, масса которой $= m$, приложена сила P (фиг. 115). Вслѣдствіе существованія связей точка будетъ имѣть нѣкоторое дѣйствительное ускореніе a, иное, чѣмъ то, которое она имѣла бы отъ дѣйствія силы P, если бы была свободна. Опредѣлимъ по величинѣ и направленію такую силу $Q = ma$, которая произвела бы это *дѣйствительное ускореніе*, если бы точка была свободной. Силу P будемъ называть *приложенной силой*, а силу Q — *дѣйствующей силой*. Считая силу Q за составляющую силы P, по правилу параллелограмма легко найдемъ и вторую составляющую силы P, а именно силу R, которую д'Аламберъ назвалъ *потерянной силой*. Сила R наз-



Фиг. 115.

вана потерянной, потому что она уравновѣшивается равной и противоположной ей силой R', замѣняющею связи точки. Но изъ чертежа видно, что потерянная сила R есть равнодѣйствующая приложенной силы P и другой силы Q', равной и прямопротивоположной дѣйствующей силѣ Q. Эта сила Q', очевидно, есть ничто иное какъ *сила инерціи* точки A. Такимъ образомъ заключаемъ, что сила R', замѣняющая связи тѣла, уравновѣшиваетъ приложенную силу P и силу инерціи Q', или, что *во всякій моментъ движенія несвободной точки существуетъ равновѣсіе между силами P, Q' и R'.*

Это заключеніе можно распространить и на неизмѣняемую систему точекъ, т.-е. на твердое тѣло, на которое дѣйствуютъ нѣсколько силъ, и высказать слѣдующее замѣчательное положеніе:

Во всякій моментъ движенія несвободнаго тѣла существуетъ равновѣсіе между всѣми приложенными къ тѣлу силами, его силой инерціи и силами, замѣняющими связи тѣла.

На основаніи начала д'Аламбера можно всѣ вопросы, относящіеся къ несвободному движенію, сводить на вопросы равновѣсія и, слѣдовательно, пользоваться ранѣе выведенными уравненіями равновѣсія, присоединивъ къ приложеннымъ силамъ силу инерціи тѣла и силу, замѣняющую его связи.

Такъ какъ въ случаѣ равновѣсія сумма проекцій всѣхъ силъ на какую угодно ось должна равняться нулю, то, избравъ за такое направленіе нѣкоторую произвольную ось l и назвавъ черезъ α, α', α'' — углы, образуемые съ осью равнодѣйствующею P всѣхъ приложенныхъ силъ, силою R, замѣняющею связи, и силою инерціи ma (гдѣ m и a — масса и дѣйствительное ускореніе тѣла) можемъ написать:

$$P\cos\alpha + R\cos\alpha' + ma\cos\alpha'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

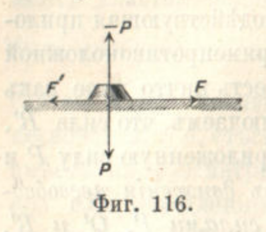
Если же за ось проекцій примемъ направленіе движенія, то $\alpha'' = 180^0$, $\cos\alpha'' = -1$, такъ что уравненіе (1) приметъ видъ:

$$P\cos\alpha + R\cos\alpha' - ma = 0 \text{ или } ma = P\cos\alpha + R\cos\alpha' \; . \; . \; . \; . (2).$$

Несвободное прямолинейное движеніе.

§ 207. **Движеніе тѣла по горизонтальной плоскости.** Положимъ, что нѣкоторое тяжелое тѣло, на которое дѣйствуетъ горизонталь-

ная постоянная сила F, движется прямолинейно поступательно по горизонтальной плоскости (фиг. 116). На тѣло дѣйствуетъ кромѣ силы F еще собственный его вѣсъ P и нормальное сопротивленіе плоскости $-P$, равное и прямопротивоположное вѣсу тѣлу. Такъ какъ эти двѣ послѣднія силы взаимно уничтожаются, то слѣдовало бы думать, что тѣло движется съ постояннымъ ускореніемъ $= \frac{F}{m}$. Въ дѣйствительности, однако, тѣло движется или равномѣрно, или равноускоренно, но во всякомъ случаѣ не съ ускореніемъ $\frac{F}{m}$, а съ нѣкоторымъ другимъ ускореніемъ $a < \frac{F}{m}$.



Фиг. 116.

Такое явленіе, какъ бы противорѣчащее законамъ движенія, невольно наводитъ на мысль, что причиной замедленія должна быть нѣкоторая новая сила F', возникающая при движеніи и дѣйствующая противоположно его направленію.

Такая сила дѣйствительно существуетъ. Она возникаетъ вслѣдствіе *тренія* между тѣломъ и плоскостью или поверхностью, по которой оно движется, вслѣдствіе чего и называется *силой тренія. Сила тренія* F', какъ показали опыты, *противоположна направленію движенія и пропорціональна нормальному (перпендикулярному) давленію на поверхность или плоскость.* Такимъ образомъ величина ея можетъ быть выражена формулой $F' = f.\ N$, гдѣ N — нормальное давленіе, а f — численный множитель пропорціональности, называемый обыкновенно *коэффиціентомъ тренія* *).

Въ нашемъ случаѣ нормальное давленіе $N =$ вѣсу тѣла P и поэтому $F' = fP$. Итакъ, движущей силой для нашего тѣла будетъ разность двухъ силъ $F - fP$, вслѣдствіе чего ускореніе

$$a = \frac{F - fP}{m}.$$

---

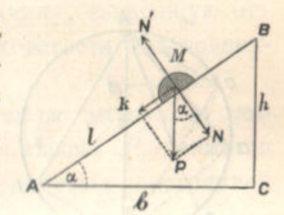
*) Коэффиціентъ тренія f зависитъ отъ матеріала трущихся тѣлъ, отъ степени гладкости ихъ поверхностей и отъ смазки.

При $F = fP$, ускореніе $a = O$, т.-е. тѣло движется равномѣрно. То же самое мы могли бы получить, примѣняя здѣсь начало д'Аламбера. Проектируя всѣ силы, включая сюда силу тренія и силу инерціи на направленіе движенія, мы получили бы, что

$$ma = F - fP, \text{ откуда } a = \frac{F - fP}{m}.$$

§ 208. Движеніе тѣла по наклонной плоскости.

а) *Отъ собственнаго вѣса, не принимая во вниманіе тренія.* Разсмотримъ движеніе тѣла, лежащаго на наклонной плоскости ABC (фиг. 117), подъ дѣйствіемъ его вѣса P, при чемъ сперва, для упрощенія задачи, не будемъ принимать во вниманіе силу тренія. Разложивъ вѣсъ тѣла P на двѣ составляющія: на силу N, перпендикулярную къ наклонной плоскости и представляющую нормальное давленіе тѣла на плоскость, и на силу K по направленію длины AB плоскости, находимъ, что первая сила N уничтожится равнымъ и противоположнымъ сопротивленіемъ плоскости N', такъ что движущей силой будетъ лишь вторая сила K. Такъ какъ $\angle PMN = \angle BAC = \alpha$, какъ углы съ взаимно-перпендикулярными сторонами, то $\triangle\triangle$-ки PMN и ABC подобны, откуда, называя длину плоскости $AB = l$, а высоту $BC = h$, получимъ, что $K : P = h : l$, или $K = P\frac{h}{l}$, или иначе, $K = P \sin\alpha$. Ускореніе g' тѣла, движущагося по наклонной плоскости, найдется изъ пропорціи $g' : g = K : P$, откуда $g' = \frac{gK}{P} = g\sin\alpha$. Такимъ образомъ движеніе тѣла по наклонной плоскости есть движеніе равноускоренное.



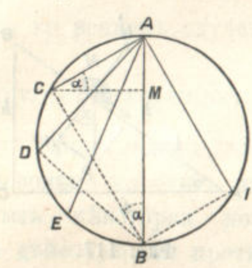
Фиг. 117.

Величину силы $K = P\frac{h}{l}$, движущей тѣло вдоль наклонной плоскости, нашелъ впервые голландскій ученый *Стевинъ* *) на основаніи слѣдующаго оригинальнаго разсужденія. Представимъ, что на наклонную плоскость надѣта безконечная цѣпь (или лучше гибкій безконечный шнурокъ), которая можетъ двигаться по ней безъ тренія. Будучи предоставлена самой себѣ, цѣпь эта, очевидно, будетъ находиться въ равновѣсіи. Такимъ образомъ вѣсъ P части

*) Михаилъ Стевинъ извѣстенъ въ исторіи науки, какъ изобрѣтатель десятичныхъ дробей.

ея, лежащей на длинѣ l наклонной плоскости, уравновѣшивается вѣсомъ K другой ея части, прилегающей къ высотѣ h этой плоскости, или иначе, сила, стремящаяся двигать тѣло вдоль наклонной плоскости внизъ, равна силѣ, стремящей двигать это тѣло вдоль наклонной плоскости вверхъ, т.-е. равна вѣсу K. Такъ какъ вѣса K и P обѣихъ частей цѣпи относятся какъ ихъ длины, т.-е. $K:P=h:l$, то $K=P\frac{h}{l}$. Этотъ замѣчательный выводъ, найденный безъ помощи параллелограмма силъ, считался однимъ изъ основныхъ положеній механики и назывался *„принципомъ наклонной плоскости"*.

Галилей, который изъ опытовъ надъ движеніемъ тѣлъ по наклонной плоскости, вывелъ законы паденія тѣлъ, открылъ еще слѣдующее интересное свойство этого движенія: Тяжелое тѣло, движущееся безъ начальной скорости изъ точки A діаметра $AB=D$ вертикальнаго круга, проходитъ *въ одинаковое время* какъ длину этого діаметра, такъ и длину любой хорды этого круга, напр., AC, AD, AE, AI.... (фиг. 118). Дѣйствительно, такъ какъ $\angle ACM = \angle ABC = \alpha$, то длина хорды $AC = AB\sin\alpha = D\sin\alpha$, а ускореніе падающаго по ней тѣла $= g\sin\alpha$.



Фиг. 118.

Такъ какъ движеніе по хордѣ AC есть равноускоренное, то имѣемъ, что $D\sin\alpha = {}^1/_2\, g\sin\alpha.\, t^2$, откуда $t=\sqrt{\frac{2D}{g}}$, но это же значеніе t вмѣстѣ съ тѣмъ выражаетъ время, въ которое свободно падающее тѣло проходитъ пространство D, т.-е. вертикальный діаметръ, что и слѣдовало доказать. То же самое легко доказать относительно движенія по любой хордѣ, выходящей изъ точки A или изъ точки B діаметра, напр., CB, DB, IB,....

b) *Движеніе тѣла по наклонной плоскости отъ собственнаго вѣса, принимая во вниманіе треніе.* На разсматриваемое тѣло (фиг. 117) дѣйствуютъ слѣдующія силы: 1) вѣсъ P тѣла; 2) нормальное сопротивленіе плоскости $N=P\cos\alpha$ и 3) сила тренія $F=fN=fP\cos\alpha$, направленная въ сторону противоположную движенію, т.-е. вверхъ по наклонной плоскости. Спроектировавъ всѣ силы на направленіе движенія и принимая во вниманіе силу инерціи, по началу д'Аламбера, имѣемъ:

$$ma = P\sin\alpha - fP\cos\alpha, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{P\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{m}.$$

Замѣтивъ, что ускореніе $a = O$, если $sin\alpha - f\,cos\alpha = O$, или, если $f = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tang\alpha$, заключаемъ, что если тангенсъ угла наклонной плоскости равенъ коэффиціенту тренія, то тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи статическомъ (т.-е. въ покоѣ) или динамическомъ (т.-е. въ прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи). Малѣйшій толчекъ, данный тѣлу, приведетъ его въ равномѣрное движеніе, а малѣйшее увеличеніе угла наклонной плоскости—въ равномѣрно-ускоренное движеніе. Вслѣдствіе такого замѣчательнаго свойства этого угла, его называютъ *угломъ тренія* и обозначаютъ обыкновенно буквой φ, такъ что $f = tang\varphi$. Очевидно, что уголъ φ представляетъ, вообще говоря, перемѣнную величину, зависящую отъ свойствъ матеріаловъ трущихся тѣлъ, шероховатости ихъ поверхности и отъ смазки.

c) *Движеніе тѣла отъ приложенной силы вверхъ по наклонной плоскости.* Положимъ, что тѣло, вѣсомъ P, движется вверхъ по наклонной плоскости вслѣдствіе дѣйствія постоянной силы Q, приложенной къ нему подъ угломъ β къ длинѣ плоскости (фиг. 119). Требуется опредѣлить ускореніе движенія. На тѣло дѣйствуетъ: 1) вѣсъ его P, 2) приложенная сила Q, 3) нормальное сопротивленіе плоскости, равное по величинѣ разности $N - N'$ двухъ нормальныхъ слагающихъ силъ P и Q, 4) сила тренія $F = f\,(N - N')$. Спроектировавъ всѣ силы на направленіе движенія, получимъ:

Фиг. 119.

$$ma = - P sin\alpha + Q\,cos\,\beta - f\,(N - N')$$ или замѣтивъ, что

$$N = Pcos\alpha \text{ и } N' = Qsin\beta,$$

$$ma = - Psin\alpha + Qcos\beta - f\,(Pcos\alpha - Q\,sin\beta),$$ откуда

$$a = \frac{Q\,(cos\beta + fsin\beta) - P\,(sin\alpha + fcos\alpha)}{m}.$$

Тѣло будетъ двигаться равномѣрно при $a = O$. При этомъ $Q\,(cos\beta + fsin\beta) = P\,(sin\alpha + f\,cos\alpha)$ и слѣдовательно сила

$$Q = P\,\frac{sin\alpha + f\,cos\alpha}{cos\beta + f\,sin\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Подставивъ вмѣсто f его значеніе $tang\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi}$ и сдѣлавъ не-

обходимыя упрощенія, получимъ, что

$$Q = P\,\frac{sin\alpha\ cos\varphi + sin\varphi\ cos\alpha}{cos\beta\ cos\varphi + sin\beta\ sin\varphi} \text{ или } Q = P\,\frac{sin(\alpha+\varphi)}{cos\,(\varphi-\beta)} \ldots (1').$$

Если приложенная сила Q параллельна длинѣ наклонной плоскости, то $\angle\beta = O$ и слѣдовательно $Q = P\,\frac{sin\,(\alpha+\varphi)}{cos\varphi} \ldots (2).$

Если сила Q параллельна основанію $AC = b$ наклонной плоскости, то $\angle\beta = \angle(360^0 - \alpha)$, $sin\beta = -sin\alpha$, $cos\beta = cos\alpha$ и формула (1) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$Q = P\,\frac{sin\alpha + fcos\alpha}{cos\alpha - fsin\alpha} = P\,\frac{sin\alpha cos\varphi + cos\alpha sin\varphi}{cos\alpha cos\varphi - sin\alpha\ sin\varphi} = P\,\frac{sin\,(\alpha+\varphi)}{cos\,(\alpha+\varphi)} \text{ или}$$

$$Q = Ptang\,(\alpha+\varphi) \ldots\ldots\ldots (3).$$

Изъ формулъ (1′), (2) и (3) легко видимъ, что величина силы Q, равномѣрно движущей тѣло вверхъ по наклонной плоскости, тѣмъ меньше, чѣмъ меньше уголъ α наклона. При данныхъ опредѣленныхъ величинахъ угловъ α и φ, сила Q будетъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія знаменателя формулы (1′) къ единицѣ и достигнетъ наименьшей величины при $\varphi - \beta = O$ или при $\beta = \varphi$. Въ этомъ случаѣ $Q = Psin\,(\alpha+\varphi)$. При вращеніи направленія силы по часовой стрѣлкѣ величина силы Q возрастаетъ, какъ видно изъ формулъ (2) и (3).

При равномѣрномъ движеніи тѣла внизъ по наклонной плоскости величина дѣйствующей силы Q получится изъ формулы (1′), замѣнивъ въ ней $+\varphi$ на $-\varphi$, такъ какъ сила тренія будетъ въ этомъ случаѣ имѣть противоположное направленіе. Такимъ образомъ

$$Q = P\,\frac{sin\,(\alpha-\varphi)}{cos\,(\varphi+\beta)} \ldots\ldots\ldots (4).$$

Несвободное криволинейное движеніе.

§ 209. **Центростремительная и центробѣжная сила.** Одинъ изъ простѣйшихъ примѣровъ несвободнаго криволинейнаго движенія представляетъ круговое движеніе тѣла (разсматриваемаго какъ точка), привязаннаго къ гибкому шнурку, другой конецъ котораго, предположимъ, находится въ нашей рукѣ. Если этому свободновисящему тѣлу сообщимъ сильный боковой толчокъ, то шнурокъ вытянется и, представляя собой сопротивленіе свободному движенію тѣла въ направленіи толчка, заставитъ тѣло вращаться по

окружности. Сила, съ которой шнурокъ въ каждый моментъ движенія тѣла заставляетъ его сворачивать съ прямолинейнаго пути по касательной къ центру, называется *центростремительной силой*. Она-то и производитъ извѣстное уже намъ центростремительное или нормальное ускореніе $a_n = \frac{v^2}{r}$ и дѣйствуетъ на тѣло по радіусу отъ окружности къ центру. Величина ея $F = ma_n$ или $F = \frac{mv^2}{r}$, гдѣ m—масса тѣла. Но если шнурокъ дѣйствуетъ на тѣло съ силой $F = \frac{mv^2}{r}$, то, по закону равенства дѣйствія и противодѣйствія, и тѣло должно дѣйствовать на шнурокъ съ силой равной, но противоположно-направленной (т.-е. по радіусу отъ центра къ окружности), что и наблюдается въ дѣйствительности: рука, держащая шнурокъ, испытываетъ натяженіе, замѣтно усиливающееся при увеличеніи скорости движенія тѣла.

Эта послѣдняя сила, весьма замѣчательная по своимъ многочисленнымъ приложеніямъ на практикѣ и представляющая, очевидно, ничто иное какъ *силу инерціи тѣла*, называется *центробѣжной силой*. Въ каждый моментъ криволинейнаго движенія, можно сказать, существуетъ равновѣсіе между центростремительной и центробѣжной силой, хотя слѣдуетъ всегда помнить, что центростремительная сила идетъ отъ шнурка и дѣйствуетъ на тѣло, а центробѣжная сила идетъ отъ тѣла и дѣйствуетъ на шнурокъ и держащую его руку, на тѣло же центробѣжная сила дѣйствовать не можетъ, ибо къ нему она не приложена.

Представимъ, что мы будемъ увеличивать скорость v вращенія тѣла. Тогда обѣ силы, центростремительная и центробѣжная, равныя $F = \frac{mv^2}{r}$, будутъ возрастать. При большой величинѣ скорости (назовемъ ее черезъ V) центробѣжная сила $\frac{mV^2}{r}$ преодолѣетъ крѣпость шнурка, т.-е. разорветъ его. Въ моментъ уничтоженія связи должна исчезнуть какъ центростремительная сила, такъ и вызванная ею центробѣжная сила. Тѣло, сдѣлавшись свободнымъ, перестанетъ двигаться криволинейно и полетитъ, по свойству инерціи, со скоростью V по касательной къ траекторіи въ той точкѣ ея, въ которой оно находилось въ моментъ разрыва шнурка.

Для выраженія величины центростремительной и центробѣжной силы тѣла, разсматриваемаго какъ точка, кромѣ формулы $F=\frac{mv^2}{r}$ (1) часто употребляются еще двѣ слѣдующія формулы:

I. Такъ какъ $v=\omega r$, то $F=\frac{m\omega^2r^2}{r}$ или $F=m\omega^2r$ . . . (2).

II. Назовемъ черезъ T время одного полнаго оборота тѣла вокругъ оси. Замѣтивъ, что въ равномѣрномъ движеніи $v=\frac{2\pi r}{T}$, и, подставивъ это значеніе v въ (1), получимъ:

$$F=\frac{m\,.\,4\pi^2r^2}{rT^2} \text{ или } F=mr\frac{4\pi^2}{T^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

§ 210. **Примѣры дѣйствія центробѣжной силы.** 1. Положимъ (фиг. 120), что въ криволинейномъ жолобѣ лежитъ шаръ. Если сообщимъ ему толчекъ по направленію оси жолоба, то шаръ станетъ катиться по криволинейной траекторіи, при чемъ одновременно возникнутъ двѣ силы: центростремительная — отъ сопротивленія стѣнокъ жолоба, отклоняющаго шаръ съ прямолинейнаго пути, и центробѣжная, выражающаяся въ видѣ давленія шара на стѣнки жолоба по направленію отъ центра къ окружности.



Фиг. 120.

Если жолобъ сдѣланъ, напр., изъ каучука, то дѣйствіе центробѣжной силы наглядно обнаруживается въ видѣ выпучиванія соотвѣтственныхъ частей наружной поверхности жолоба при движеніи шара.

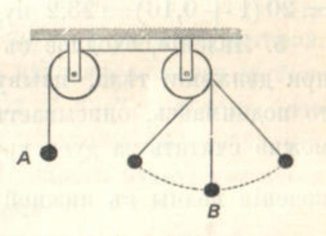
2. Подобное же явленіе представляетъ движеніе пары вагонныхъ колесъ, катящихся по криволинейному рельсовому пути. Сила, сворачивающая колеса съ прямолинейнаго направленія, т.-е. давленіе рельсовъ на колеса представляетъ центростремительную силу. Равное и противоположное давленіе колесъ на рельсы есть центробѣжная сила $F=\frac{mv^2}{r}$, гдѣ m и v—масса и скорость вагона, r—радіусъ кривизны пути. Замѣтивъ, что черезъ колеса на рельсы передается еще вѣсъ вагона P и сложивъ геометрически силы F и P, найдемъ, что полное давленіе вагона на рельсы наклонно къ пути и равно $R=\sqrt{F^2+P^2}=\sqrt{\left(\frac{mv^2}{r}\right)^2+(mg)^2}=\frac{m}{r}\sqrt{v^4+g^2r^2}$.

Отсюда слѣдуетъ, что при большой скорости и маломъ радіусѣ кривизны это давленіе можетъ причинить сходъ вагона съ рельсовъ, послѣ чего вагонъ покатится по инерціи съ пріобрѣтенной скоростью по касательной къ элементу рельсового пути, на которомъ онъ находился въ моментъ схода.

Въ виду такой опасности требуется: 1) чтобы радіусы кривизны въ закругленіяхъ желѣзнодорожнаго пути не были менѣе установленной нормы; 2) чтобы скорость на закругленіяхъ была менѣе скорости на прямолинейныхъ участкахъ и вообще, чтобы она не превышала опредѣленной величины и 3) чтобы наружный рельсъ на закругленіяхъ ставился бы выше внутренняго.

Изъ этого примѣра вполнѣ понятно, почему лошадь, быстро скачущая по цирковой аренѣ, принимаетъ наклонное положеніе.

3. Интересный примѣръ дѣйствія центробѣжной силы представляетъ движущаяся система изъ двухъ равныхъ по вѣсу грузовъ A и B, подвѣшанныхъ на тонкомъ шнурѣ, перекинутомъ черезъ два блока (фиг. 121). Грузы, находясь въ покоѣ, взаимно уравновѣшиваютъ другъ друга, но если одному изъ нихъ, напр. B, сообщить боковымъ толчкомъ качательное движеніе, то этотъ грузъ станетъ опускаться, а другой грузъ A — подниматься. Это явленіе объясняется дѣйствіемъ центробѣжной силы тѣла B, возникшей при криволинейномъ движеніи и тянущей шнурокъ. Очевидно, что при одновременномъ и одинаковомъ качаніи обоихъ грузовъ A и B, они останутся на одинаковомъ уровнѣ, такъ какъ возникшія при этомъ равныя центробѣжныя силы, растягивающія шнурокъ, уравновѣсятъ другъ друга.



Фиг. 121.

4. Представимъ, что нѣкоторое тѣло движется по упругому мосту, прогибающемуся подъ его тяжестью. Въ этомъ случаѣ давленіе моста на тѣло равно суммѣ двухъ силъ, направленныхъ вертикально вверхъ: сопротивленія вѣсу P тѣла и центростремительной силы $F=\frac{mv^2}{r}$, гдѣ m и v—масса и скорость тѣла, r—радіусъ дуги прогиба моста. Итакъ, полное давленіе моста на тѣло=

$$P+\frac{mv^2}{r}=P\left(1+\frac{v^2}{gr}\right)\ .\ \ .\ \ .\ (A).$$

Очевидно точно такое же давленіе производитъ тѣло на мостъ своимъ вѣсомъ и центробѣжной силой.

Выраженію (A) можно придать болѣе удобный для вычисленія видъ. Называя длину стрѣлки прогиба черезъ f, а длину моста черезъ L, можемъ по извѣстной теоремѣ геометріи, что перпендикуляръ, опущенный изъ какой-либо точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра, написать пропорцію:

$$\frac{f}{{}^1\!/_2\, L} = \frac{{}^1\!/_2\, L}{2r - f}, \text{ откуда } 2rf = \frac{L^2}{4} + f^2 \text{ и } r = \frac{L^2}{8f} + \frac{f}{2}.$$

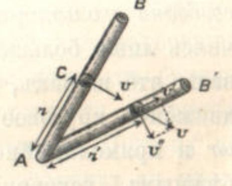
Пренебрегая величиной $\frac{f}{2}$ вслѣдствіе ея малости, находимъ съ достаточной точностью, что $r = \frac{L^2}{8f}$ и, слѣдовательно, давленіе тѣла на мостъ $= P\left(1 + \frac{8fv^2}{gL^2}\right)$.

Если, напримѣръ, $P = 20$ пуд., $v = 16$ фут. въ $1''$, $L = 20$ фут., $f = 1$ фут., то давленіе тѣла на мостъ $= 20\left(1 + \frac{8 \cdot 16^2}{32 \cdot 20^2}\right) = 20(1 + 0{,}16) = 23{,}2$ пуда.

5. Явленіе, сходное съ предыдущимъ примѣромъ, происходитъ при движеніи тѣла, плывущаго по волнамъ. Оно, то опускаясь, то поднимаясь, описываетъ волнистую траекторію, части которой можно считать за дуги круга. Давленіе воды на тѣло во время паденія волны въ нижней точкѣ ея равно $P + \frac{mv^2}{r}$, гдѣ P, m, v — вѣсъ, масса и скорость тѣла, а r — радіусъ кривизны волны. Во время подъема волны въ верхней точкѣ давленіе воды на тѣло равно $P - \frac{mv^2}{r}$. Въ обоихъ случаяхъ общее давленіе воды направлено по вертикали вверхъ (иначе тѣло погрузилось бы въ волны), но во второмъ случаѣ центростремительная сила направлена вертикально внизъ, какъ это слѣдуетъ изъ формы кривой, вслѣдствіе чего она и входитъ въ выраженіе давленія съ отрицательнымъ знакомъ. Разность давленій въ обоихъ случаяхъ $= \frac{2mv^2}{r} = \frac{2Pv^2}{gr}$. Этой постоянной перемѣной давленій объясняется чув-

ство тошноты, испытываемое человѣкомъ, плывущимъ на кораблѣ во время значительнаго волненія водной поверхности. Давленія на внутренности брюшной полости безпрерывно измѣняются, дѣлаясь то больше, то меньше ихъ обыкновенной величины, а это обстоятельство и вызываетъ тошноту.

§ 211. Разсмотримъ теперь примѣръ такого несвободнаго движенія тѣла, которое происходитъ совершенно такимъ образомъ, какъ будто бы его производила центробѣжная сила, дѣйствующая на тѣло, хотя въ дѣйствительности это движеніе происходитъ вслѣдствіе свойства инерціи этого тѣла. Вообразимъ, что въ гладкой горизонтальной трубкѣ AB (фиг. 122) помѣщенъ шарикъ, который можетъ свободно двигаться вдоль ея оси. Если станемъ вращать трубку въ горизонтальной плоскости около ея конца A, то увидимъ, что шарикъ начнетъ скользить въ трубкѣ отъ A къ B съ постоянно возрастающей скоростью и, наконецъ, вылетитъ изъ трубки. Чтобы объяснить это явленіе, положимъ, что въ начальный моментъ шарикъ находится въ точкѣ C. Вращающаяся трубка производитъ на шарикъ давленіе, перпендикулярное къ оси, и сообщаетъ ему въ этомъ направленіи нѣкоторую скорость v. При поворотѣ трубки въ положеніе AB', шарикъ, *по свойству инерціи*, сохранитъ величину и направленіе этой скорости, которая, однако, теперь уже имѣетъ направленіе наклонное къ оси трубки. Разлагая скорость v на двѣ составляющія v' и v'', найдемъ, что шарикъ долженъ двигаться со скоростью v' вдоль оси трубки отъ центра къ окружности. На самомъ дѣлѣ шарикъ будетъ двигаться со скоростью большею, чѣмъ v', такъ какъ въ каждый слѣдующій моментъ онъ, удаляясь отъ центра вращенія, увеличиваетъ свою линейную скорость $v = \omega r$, гдѣ ω — угловая скорость вращенія трубки, которая при равномѣрномъ вращеніи представляетъ постоянную величину, а r — перемѣнная, все возрастающая величина разстоянія центра вращенія до шарика. Итакъ, шарикъ будетъ двигаться по оси *ускоренно*.



Фиг. 122.

Постараемся показать, что ускореніе движенія шарика $= \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$, т.-е. совершенно такое же, какое происходило бы отъ дѣйствія приложенной къ нему центробѣжной силы. Предста-

вимъ, что шарикъ плотно входитъ въ трубку и не можетъ вполнѣ свободно двигаться внутри нея (напр., вслѣдствіе тренія или своей упругости), такъ что для его перемѣщенія необходимо приложить нѣкоторую опредѣленную силу F. При вращеніи трубки шарикъ будетъ находиться въ круговомъ движеніи, при чемъ вслѣдствіе связей, представляемыхъ стѣнками трубки, онъ будетъ испытывать дѣйствіе центростремительной силы и въ то же время самъ будетъ производить давленіе на стѣнки отъ центра къ окружности съ центробѣжной силой $m\omega^2 r$. При увеличеніи угловой скорости вращенія трубки давленіе шарика тоже будетъ возрастать и въ тотъ моментъ, когда величина его будетъ равна F, шарикъ начнетъ двигаться по трубкѣ.

Положимъ, что угловая скорость трубки въ этотъ моментъ$=\omega_1$, такъ что давленіе шарика $F=m\omega_1{}^2 r$. Въ слѣдующій моментъ, при той же угловой скорости трубки, шарикъ будетъ двигаться по ней уже подъ дѣйствіемъ силы $m\omega_1{}^2 r_1$, гдѣ $r_1 > r$ на величину удаленія шарика отъ первоначальнаго положенія его въ C. Движеніе шарика съ такимъ перемѣннымъ, все увеличивающимся ускореніемъ будетъ продолжаться до конца B трубки, послѣ чего онъ вылетитъ изъ нея какъ бы отъ толчка съ силой $m\omega_1{}^2 R$, гдѣ R длина трубки, при чемъ къ скорости его по оси трубки прибавится еще скорость $V=\omega_1 R$ по касательной къ дугѣ, описываемой концомъ трубки.

Такъ какъ въ этомъ послѣднемъ примѣрѣ связи, задерживающія свободное движеніе шарика, вліяютъ только на скорость движенія, но не измѣняютъ его характера, то движеніе шарика, *свободно скользящаго* по трубкѣ, происходитъ точно такъ же, отличаясь лишь большею скоростью движенія. Итакъ, мы можемъ сказать, что шарикъ, свободно скользящій по трубкѣ, имѣетъ двоякое движеніе: круговое (переносное) вмѣстѣ съ трубкой со скоростью ωr и прямолинейное (относительное) по оси трубки съ центробѣжнымъ ускореніемъ $\omega^2 r$. Перемѣнную силу, производящую послѣднее ускореніе, принято условно называть также центробѣжной силой.

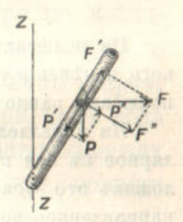
§ 212. Движенія, подобныя только что разсмотрѣнному, можно наблюдать довольно часто. Во всѣхъ учебникахъ физики описывается приборъ, называемый центробѣжной машиной, посредствомъ которой производится рядъ опытовъ, обнаруживающихъ различныя

интересныя явленія, происходящія при несвободномъ круговомъ движеніи тѣлъ вслѣдствіе свойства ихъ инерціи, которое обыкновенно (не вполнѣ правильно) называютъ центробѣжной силой. Разсмотримъ еще нѣсколько примѣровъ такихъ движеній.

1. При вращеніи наклонной трубки съ шарикомъ около вертикальной оси, проходящей черезъ нижній конецъ ея (фиг. 123), шарикъ поднимается по трубкѣ, если составляющая F' его, такъ называемой, центробѣжной силы F будетъ болѣе соотвѣтствующей составляющей P' вѣса P шарика. Подобное этому явленіе представляетъ движеніе вверхъ кольца, свободно висящаго на гладкой палкѣ, при быстромъ взмахѣ палки.

2. При вращеніи около вертикальной оси цилиндрическаго сосуда съ жидкостью, частицы жидкости удаляются отъ центра къ окружности и поднимаются по стѣнкамъ сосуда такъ, что поверхность жидкости принимаетъ видъ параболической воронки.

3. Если къ сосуду съ водой привяжемъ веревку и, держа другой конецъ ея въ рукѣ, приведемъ сосудъ въ быстрое вращательное движеніе въ вертикальной плоскости, то, при достаточной быстротѣ вращенія, вода, прижимаясь центробѣжной силой къ дну сосуда, преодолѣетъ посредствомъ нея силу своего вѣса и не выльется изъ сосуда. Подобное же явленіе наблюдается при движеніи тѣла по такъ называемой центробѣжной дорогѣ.



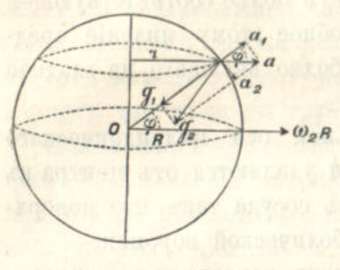
Фиг. 123.

4. Дѣйствіемъ центробѣжной силы объясняется разрывъ маховиковъ, приведенныхъ въ очень быстрое вращательное движеніе. Возникающія при вращеніи центробѣжныя силы преодолѣваютъ сопротивляющіяся имъ силы сцѣпленія частицъ; маховикъ разрывается и части его летятъ въ вертикальной плоскости вращенія съ пріобрѣтенной въ моментъ разрыва живой силой. Поэтому во избѣжаніе несчастій рекомендуется не ставить рабочихъ въ плоскости вращенія маховика. Точно также объясняется разбрасываніе грязи, прилипающей къ шинамъ быстро движущагося экипажа. При резиновыхъ шинахъ разбрасываніе производится во всѣ стороны силой упругости резины.

5. Суточнымъ вращеніемъ земли вокругъ ея оси объясняются многіе интересные явленія и факты, изъ которыхъ здѣсь мы разсмотримъ два: измѣненіе

вѣса тѣлъ въ зависимости отъ положенія ихъ на земной поверхности и измѣненіе формы земного шара.

Легко выяснить, почему вѣсъ одного и того же тѣла будетъ *наименьшимъ у экватора и возрастаетъ по мѣрѣ приближенія къ полюсамъ*, гдѣ онъ достигаетъ *наибольшей величины*. Дѣйствительно, при вращеніи земли вокругъ оси, тѣло, лежащее на экваторѣ (фиг. 124), по свойству инерціи стремится двигаться по радіусу экватора отъ центра къ окружности съ центробѣжнымъ ускореніемъ $a = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$ (§ 209. II), гдѣ R—радіусъ земли = 6370000 метр., T— время одного полнаго оборота земли = 23 часа 56 мин. 4 сек. = = 86164 сек. Подставляя эти числа, найдемъ, что $\omega^2 R =$ 0,03387 метр. Это ускореніе по направленію прямо противоположно ускоренію g силы тяжести, а потому дѣйствительно наблюдаемое у экватора ускореніе падающаго тѣла $g_1 = g - \omega^2 R = g - 0{,}03387$, а наблюдаемый при помощи динамометра вѣсъ P' тѣла менѣе его дѣйствительнаго вѣса P на величину $m\omega^2 R$ (гдѣ m—масса тѣла) или



Фиг. 124.

$$P' = P - m\omega^2 R = m(g - \omega^2 R).$$

На полюсахъ, т.-е. въ точкахъ прохожденія земной оси, очевидно, никакого измѣненія силы тяжести не происходитъ, такъ что ускореніе паденія на полюсахъ равно постоянной величинѣ $g = 9{,}83$ м.

На параллели подъ широтою φ центробѣжное ускореніе, перпендикулярное къ оси вращенія $a = \omega^2 r$ (гдѣ r—радіусъ параллели) $= \omega^2 R cos\varphi$. Разложимъ это ускореніе на два взаимно перпендикулярныхъ: на ускореніе a_1, направленное по радіусу R земли, и на ускореніе a_2, направленное по касательной къ меридіану.

Ускореніе $a_1 = \omega^2 r cos\varphi = \omega^2 R cos^2\varphi$ уменьшаетъ ускореніе паденія тѣла къ центру земли, такъ что это послѣднее ускореніе $g_1 = g - \omega^2 R cos^2\varphi$.

Ускореніе $a_2 = \omega^2 r sin\varphi = \omega^2 R sin\varphi\, cos\varphi$ отклоняетъ тѣла отъ полюсовъ къ экватору. Отсюда слѣдуетъ, что дѣйствительное ускореніе падающаго тѣла направлено не по радіусу къ центру земли, а по діагонали параллелограмма, построеннаго на взаимно перпендикулярныхъ ускореніяхъ g_1 и a_2 и равно

$$g_2 = \sqrt{g_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(g - \omega^2 R cos^2\varphi)^2 + (\omega^2 R sin\varphi\, cos\varphi)^2}.$$

При этихъ вычисленіяхъ предполагалось, что земля представляетъ фигуру шара, что не совсѣмъ правильно. Вслѣдствіе ускоренія a_2, направленнаго по меридіану, тѣла, лежащія на земной поверхности должны были бы двигаться къ экватору, если бы этому не препятствовало треніе. Точно также, если бы поверхность земли находилась въ жидкообразномъ состояніи, что и было въ первобытныя времена ея существованія (да и въ настоящее время $^3/_4$ земной поверхности покрыты водой), то частицы этой жидкости приближались бы къ экватору, стремясь занять такое положеніе, чтобы ихъ общая поверхность была перпендикулярна къ направленію ускоренія g_2. Вслѣдствіе этой при-

чины земля имѣетъ видъ не шара, а эллипсоида, сжатаго у полюсовъ и растянутаго у экватора. Разстояніе точекъ земной поверхности до центра земли у полюсовъ будетъ наименьшее, а у экватора наибольшее. Но такъ какъ, по закону Ньютона, сила, съ которою земля притягиваетъ другія тѣла, обратно пропорціональна квадратамъ разстояній этихъ тѣлъ отъ центра земли, то эллипсоидальная форма земли представляетъ вторую причину наименьшаго вѣса тѣлъ на экваторѣ и наибольшаго вѣса ихъ на полюсахъ.

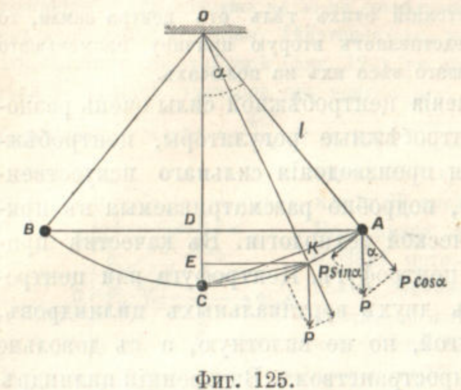
§ 213. **Техническія приложенія** центробѣжной силы очень разнообразны. Сюда относятся центробѣжные регуляторы, центробѣжные насосы, вентиляторы для произведенія сильнаго искусственнаго дутья и другія машины, подробно разсматриваемыя въ прикладной механикѣ и механической технологіи. Въ качествѣ примѣра, разсмотримъ дѣйствіе центрофугъ. Центрофуга или центробѣжный прессъ состоитъ изъ двухъ вертикальныхъ цилиндровъ, помѣщенныхъ одинъ въ другой, но не вплотную, а съ довольно большимъ промежуточнымъ пространствомъ. Внутренній цилиндръ, на боковой поверхности котораго находится множество отверстій, приводится въ быстрое вращательное движеніе—обыкновенно отъ привода—вокругъ своей оси. Въ него кладутъ, смотря по назначенію центрофуги, мокрыя ткани, измельченную свекловицу и проч. При вращеніи центрофуги, ткани, куски свекловицы и проч. прижимаются къ стѣнкамъ внутренняго цилиндра, при чемъ вода или сокъ выбрасываются черезъ отверстія въ пространство между цилиндрами, изъ котораго впослѣдствіи удаляются при помощи крана.

Движеніе математическаго маятника.

§ 214. **Простымъ математическимъ маятникомъ** называется тяжелая матеріальная точка, соединенная посредствомъ невѣсомой и нерастяжимой гибкой нити съ неподвижной точкой O, называемой *точкой привѣса* (фиг. 125). Маятникъ, выведенный изъ своего вертикальнаго положенія равновѣсія въ нѣкоторое наклонное положеніе OA и затѣмъ предоставленный самому себѣ, будетъ подъ дѣйствіемъ своего вѣса качаться взадъ и впередъ, описывая въ вертикальной плоскости нѣкоторую дугу AB, называемую *амплитудой качанія*. Изслѣдуемъ это движеніе.

Разложивъ вѣсъ маятника $P = mg$ на двѣ взаимно перпендикулярныя слагающія: одну, совпадающую съ направленіемъ нити

и равную $P\cos\alpha$, и другую, касательную къ дугѣ и равную $P\sin\alpha$, замѣтимъ, что первая слагающая уничтожается сопротивленіемъ нити, такъ что силой, движущей маятникъ, будетъ только вторая слагающая. При уменьшеніи угла α наклона нити къ вертикали движущая сила $P\sin\alpha$ уменьшается и обращается въ нуль при $\alpha=0$, т.-е. когда маятникъ придетъ въ вертикальное положеніе OC. Очевидно, что точно такимъ же образомъ будетъ измѣняться и ускореніе $g\sin\alpha$, сообщаемое движущей силой. Отсюда заключаемъ, что движеніе маятника по дугѣ AC будетъ ускоренное, но не равномѣрно-ускоренное, вслѣдствіе постепеннаго уменьшенія ускоренія. Въ точкѣ C скорость маятника достигнетъ своей наибольшей величины или, какъ выражаются, своего maximum'а.



Фиг. 125.

Затѣмъ, вслѣдствіе пріобрѣтенной живой силы при спускѣ съ высоты $=DC$, маятникъ будетъ продолжать движеніе вверхъ по дугѣ CB и остановится только тогда, когда израсходуетъ свою живую силу, т.-е. когда опять поднимется на высоту $=DC$, пройдя дугу $CB=AC$ (§ 201). Потомъ маятникъ пойдетъ такимъ же образомъ назадъ по дугѣ BA и т. д.

Итакъ, при отсутствіи сопротивленій маятникъ долженъ вѣчно совершать періодически повторяющіяся качанія или размахи, проходя постоянно одну и ту же амплитуду AB. Понятно, что въ дѣйствительности длина качаній маятника будетъ уменьшаться и, наконецъ, маятникъ остановится вслѣдствіе тренія въ точкѣ привѣса и сопротивленія воздуха.

§ 215. **Сопротивленіе нити маятника** во время качанія представляетъ перемѣнную величину, уравновѣшивающую двѣ перемѣнныя силы: слагающую $P\cos\alpha$ вѣса маятника и центробѣжную силу $\frac{mv^2}{l}=\frac{Pv^2}{gl}$, гдѣ l—длина нити. Величина этого сопротивленія $P\left(\cos\alpha+\frac{v^2}{gl}\right)$ возрастаетъ при уменьшеніи угла α и уве-

личенiи скорости v движенiя маятника. Она достигаетъ наибольшаго значенiя въ тотъ моментъ, когда маятникъ будетъ проходить черезъ самую нижнюю точку своей амплитуды, т.-е. при $\alpha = \alpha_0 = 0^0$. Въ этотъ моментъ $\cos\alpha_0 = 1$, а $v^2 = 2g \,.\, DC = 2g\,(OC - OD) = 2g\,(l - l\cos\alpha) = 2gl\,(1 - \cos\alpha)$ (§ 201).

Такимъ образомъ сопротивленiе нити въ этомъ положенiи $=$

$$P[1 + 2(1 - \cos\alpha)] = P(3 - 2\cos\alpha).$$

Если первоначально маятникъ былъ отклоненъ на уголъ $\alpha = 90^0$, то, замѣтивъ, что $\cos 90^0 = 0$, заключаемъ, что наибольшее сопротивленiе нити будетъ $= 3P$, т.-е. нить должна быть, по крайней мѣрѣ, настолько крѣпка, чтобы выдерживать тройной вѣсъ маятника.

§ 216. **Опредѣленiе времени качанiя маятника**, т.-е. времени, въ которое онъ совершаетъ одинъ свой размахъ или проходитъ одинъ разъ амплитуду AB, мы ограничимъ случаемъ весьма малыхъ качанiй, при углахъ α размаха, не большихъ 5^0.

Постараемся найти общее выраженiе перемѣнной скорости движенiя маятника въ произвольной его точкѣ. Положимъ, что маятникъ, выйдя изъ начальной точки A, описалъ нѣкоторую дугу AK. Тогда въ точкѣ K скорость его $v = \sqrt{2g \,.\, DE} = \sqrt{2g(DC - EC)}$.

Принимая по малости угла α, что дуги $AC = s$ и $KC = x$ равны своимъ хордамъ, находимъ по теоремѣ: „хорда, выходящая изъ конца дiаметра, есть средняя пропорцiональная между дiаметромъ и своей проекцiей на дiаметръ", что

$AC^2 = 2l.DC$ и $KC^2 = 2l.EC$, откуда $DC = \dfrac{AC^2}{2l}$ и $EC = \dfrac{KC^2}{2l}$.

Поэтому

$$v = \sqrt{2g\,\frac{AC^2 - KC^2}{2l}} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{g}{l}\,(s^2 - x^2)} \quad . \; . \; (a).$$

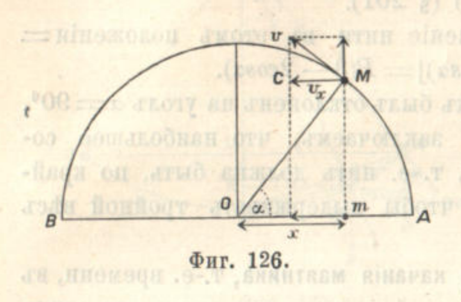
Какъ видно изъ выраженiя (a) при уменьшенiи перемѣнной величины x, скорость v увеличивается и при $x = 0$, достигаетъ

своего наибольшаго значенiя $$V = s\sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Затѣмъ на пути CB величина x будетъ увеличиваться, а v — уменьшаться. При $x = s$, величина $v = 0$.

Итакъ, маятникъ, поднимаясь, пройдетъ дугу $CB = s = AC$, что, впрочемъ, найдено уже было ранѣе.

Развернемъ дугу $AB = 2s$ въ прямую и построимъ на ней, какъ на діаметрѣ, полуокружность (фиг. 126). Вообразимъ, что по этой полуокружности равномѣрно движется точка M со скоростью $V = s\sqrt{\frac{g}{l}}$. Разсмотримъ движеніе проекціи m этой точки по



Фиг. 126.

діаметру. Это движеніе будетъ происходить съ перемѣнной скоростью V_x, представляющей проекцію скорости V на діаметръ, такъ какъ скорость проекціи m всегда равна проекціи скорости V самой точки M. Назвавъ перемѣнное разстояніе проекціи m отъ центра O черезъ x, изъ подобія ΔΔ-ковъ VMC и OMm находимъ, что
$$\frac{CM}{MV} = \frac{Mm}{OM} \text{ или } \frac{V_x}{V} = \frac{\sqrt{s^2 - x^2}}{s}, \text{ откуда } V_x = V\frac{\sqrt{s^2 - x^2}}{s} =$$
$$= \frac{s\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s^2 - x^2}}{s} \text{ или } V_x = \sqrt{\frac{g}{l}(s^2 - x^2)}.$$
Но это же выраженіе, какъ уже было найдено (a), представляетъ также перемѣнную скорость качанія маятника. Поэтому, если отрѣзокъ $Om =$ хордѣ KC, то $v = V_x$. Слѣдовательно, проекція точки M движется по діаметру [1]) точно такъ же, какъ маятникъ движется по дугѣ AB, а потому и время одного качанія маятника равно времени, въ которое точка m пройдетъ весь діаметръ, или времени, въ которое точка M пройдетъ половину окружности. Такъ какъ точка M движется равномѣрно, то $Vt = \pi s$, откуда получимъ, что искомое время качанія маятника $t = \frac{\pi s}{V} = \frac{\pi s}{s\sqrt{\frac{g}{l}}}$

$$\text{или } t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

§ 217. **Законы качанія маятника.** Изъ основной формулы (1) прямо вытекаютъ слѣдующіе законы качанія маятника:

---

[1]) Замѣтимъ, что такое движеніе называется *гармоническимъ*.

1. *При небольшихъ углахъ размаха (не болѣе 5°) время качанія маятника не зависитъ отъ величины этихъ угловъ*, т.-е. маятникъ совершаетъ свой размахъ въ одинаковое время при всѣхъ углахъ отъ 0° до 5°. Это свойство называется *изохронизмомъ* [1]) качаній маятника. Оно было впервые открыто въ 1583 году 19-лѣтнимъ Галилеемъ, наблюдавшимъ качанія паникадила въ Пизанскомъ соборѣ и опредѣлявшимъ времена качаній по біенію своего пульса [2]). На этомъ важномъ свойствѣ основано опредѣленіе времени при помощи маятника. При углахъ, большихъ 5°, время качанія возрастаетъ съ увеличеніемъ этого угла [3]).

2. *Времена качаній двухъ маятниковъ, находящихся на одномъ и томъ же мѣстѣ земной поверхности, относятся между собою какъ квадратные корни изъ ихъ длинъ*. Дѣйствительно, если обозначимъ черезъ t_1 и t_2 времена качанія двухъ маятниковъ, а черезъ l_1 и l_2—ихъ длины, то $t_1 : t_2 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} : \pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ или $t_1 : t_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$.

3. *Время качанія маятника не зависитъ отъ его вѣса*. Это слѣдуетъ изъ того, что съ возрастаніемъ вѣса P маятника возрастаетъ пропорціонально и движущая сила качанія $P\sin\alpha$.

Вообще движеніе маятника представляетъ примѣръ *несвободнаго* паденія тяжелой точки по дугѣ круга. Вообразимъ маятникъ, укрѣпленный въ точкѣ своего привѣса на нѣкоторой матеріальной плоскости (напр., на листѣ толстаго картона) такъ, что онъ можетъ качаться въ этой плоскости. Если этотъ маятникъ отведемъ изъ вертикальнаго положенія равновѣсія въ наклонное и затѣмъ позволимъ ему свободно падать по вертикали вмѣстѣ съ матеріальной плоскостью, то маятникъ, падая, будетъ сохранять свое наклонное

---

[1]) Отъ греческихъ словъ *isos*—равный и *chronos*—время.

[2]) Замѣтимъ, что времена t_1 и t_2 одного качанія каждаго изъ двухъ маятниковъ обратно пропорціональны числамъ n_1 и n_2 ихъ качаній въ одно и то же время t (напр., въ 1 минуту). Дѣйствительно, если во время t первый маятникъ сдѣлалъ n_1 качаній, а второй n_2 качаній, то время одного качанія перваго маятника $t_1 = \frac{t}{n_1}$, а второго $t_2 = \frac{t}{n_2}$. Поэтому $t_1 : t_2 = \frac{t}{n_1} : \frac{t}{n_2}$ или $t_1 : t_2 = n_2 : n_1$.

[3]) При помощи высшей математики опредѣляется болѣе точная формула времени одного качанія при всякой амплитудѣ α. Приближенная величина этой формулы такая: $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$.

положеніе, т.-е. не будетъ совершать колебаній. Это явленіе какъ будто представляетъ противорѣчіе 2-му основному закону механики, закону независимости дѣйствія силы отъ состоянія тѣла: маятникъ на неподвижной плоскости качается, а на падающей плоскости—нѣтъ. Въ дѣйствительности здѣсь нѣтъ никакого противорѣчія никакому закону механики: въ случаѣ качанія маятника въ неподвижной матеріальной плоскости мы имѣемъ явленіе *несвободнаго паденія* по дугѣ съ ускореніемъ $g\sin\alpha$, производимымъ перемѣнной силой $P\sin\alpha$, представляющей одну часть вѣса маятника, между тѣмъ какъ другая часть $P\cos\alpha$ этого вѣса уравновѣшивается сопротивленіемъ нити; во второмъ же случаѣ мы имѣемъ *свободное паденіе* по вертикали съ ускореніемъ g, производимымъ полнымъ вѣсомъ P маятника, при чемъ, очевидно, этотъ вѣсъ, именно по законамъ механики, никакого другого движенія (напр., качанія) произвести не можетъ.

§ 218. Секундный маятникъ. Открытіе сплющенности земного шара. Маятникъ, который совершаетъ одно качаніе въ секунду, называется секунднымъ маятникомъ. Длина его для небольшихъ размаховъ опредѣляется изъ формулы: $1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, откуда $l = \frac{g}{\pi^2}$.

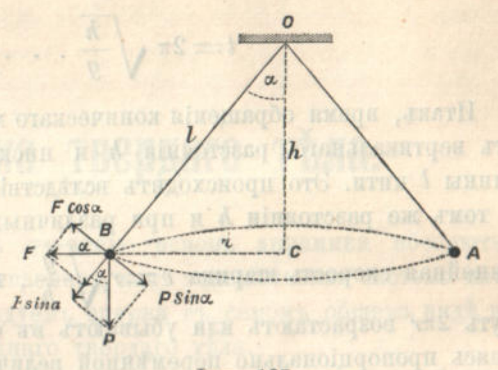
Впрочемъ, длину секунднаго маятника обыкновенно находятъ путемъ опыта, какъ это впослѣдствіи будетъ изложено въ статьѣ о физическомъ маятникѣ. Подставляя найденную опытомъ величину l, изъ формулы $g = l\pi^2$ опредѣляютъ ускореніе g силы тяжести для даннаго мѣста земной поверхности. Первый опредѣлилъ величину g *Христіанъ Гюйгенсъ* (1629—1695), заслуги котораго въ области механики заставляютъ считать его наравнѣ съ Галилеемъ и Ньютономъ однимъ изъ основателей этой науки: онъ первый создалъ теорію центробѣжной силы и удара упругихъ тѣлъ, вывелъ формулу (1) качанія маятника, разработалъ теорію физическаго маятника и первый изобрѣлъ часы съ маятникомъ для измѣренія времени. Въ 1673 году Гюйгенсъ предложилъ принять длину секунднаго маятника за универсальную единицу длины, какъ постоянную величину, взятую изъ природы. Но въ томъ же самомъ году французскій ученый Жанъ Рише, работавшій въ Кайенѣ (Южн. Америка) надъ измѣреніемъ дуги меридіана, нашелъ, что длина секунднаго маятника не постоянная, а перемѣнная величина: въ Кайенѣ, напр., она короче, чѣмъ въ Парижѣ. Рише первый высказалъ, что причина перемѣнности величины секунднаго маятника, а, слѣдовательно, и ускоренія g земного притяженія въ различныхъ мѣстахъ заключается въ томъ, что земля не имѣетъ фигуры шара, а что она сплющена у полюсовъ. Парижская академія наукъ, которой Рише представилъ свои труды, однако, никакъ не могла примириться съ новой идеей, что земля не шаръ, идеей, казавшейся чуть не ересью. Когда Ньютонъ высказался согласно съ Рише за сплющенность земли, то между французскими и англійскими учеными поднялся большой научный споръ и только впослѣдствіи, уже послѣ смерти Рише, было всѣми признано, что онъ былъ совершенно правъ. Опытами надъ качаніемъ маятника на различныхъ широтахъ была найдена общая формула для опредѣленія g для какого угодно числа φ градусовъ широты

$$g = 9{,}78 + 0{,}0506\, sin^2\varphi \text{ (въ метрахъ)},$$

посредствомъ которой легко найдемъ, что при широтѣ

$\varphi = 0^0$ (экваторъ)	45^0	90^0 (полюсы)
$g = 9{,}78$ м.	9,80 м.	9,83 м.
$l = 0{,}991$ м.	0,993 м.	0,996 м.

§ 219. **Коническій маятникъ.** Если шарику математическаго маятника, отведенному въ нѣкоторое наклонное положеніе OA (фиг. 127), сообщить толчекъ по направленію, перпендикулярному къ вертикальной плоскости, проходящей черезъ нить, то шарикъ



Фиг. 127.

маятника будетъ двигаться равномѣрно, съ нѣкоторою скоростью v, описывая горизонтальную окружность. Нить маятника въ это время будетъ описывать коническую поверхность, вслѣдствіе чего такой маятникъ называется *коническимъ*. Чтобы опредѣлить всѣ обстоятельства этого движенія, замѣтимъ, что силы, дѣйствующія на шарикъ маятника въ нѣкоторый моментъ движенія, напр., когда онъ находится въ положеніи OB, суть: вѣсъ P шарика и центробѣжная сила $F = \frac{mv^2}{r}$, гдѣ r—радіусъ описываемой горизонтальной окружности. Разложивъ каждую изъ этихъ силъ на двѣ составляющія по направленію нити OB и по перпендикуляру къ ней, получимъ двѣ составляющія $Pcos\alpha$ и $Fsin\alpha$, уравновѣшивающіяся сопротивленіемъ нити, и другія двѣ составляющія $Psin\alpha$ и $Fcos\alpha$, прямо противоположныя другъ другу. Эти двѣ послѣднія силы необходимо должны взаимно уравновѣшиваться, такъ какъ только при равновѣсіи всѣхъ силъ тѣло можетъ двигаться равномѣрно по инерціи. Итакъ $Psin\alpha = Fcos\alpha$ или $mg\, sin\alpha = \frac{mv^2}{r} cos\alpha$. Отсюда находимъ, что $v^2 = grtang\alpha$ или, называя вертикальное разстояніе OC черезъ h и замѣтивъ, что $tang\alpha = \frac{r}{h}$, получимъ,

что $v^2 = \frac{r^2 g}{h}$ или $v = r\sqrt{\frac{g}{h}}$.

Время t одного полнаго оборота легко опредѣляется изъ уравненія $vt = 2\pi r$, откуда $t = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi : \sqrt{\frac{g}{h}}$ или

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Итакъ, время обращенія коническаго маятника зависитъ только отъ вертикальнаго разстоянія h и нисколько не зависитъ отъ длины l нити. Это происходитъ вслѣдствіе того, что при одномъ и томъ же разстояніи h и при различныхъ длинахъ l нити, какъ линейная скорость шарика $v = r\sqrt{\frac{g}{h}}$, такъ и проходимый имъ путь $2\pi r$ возрастаютъ или убываютъ въ одинаковой мѣрѣ, измѣняясь пропорціонально перемѣнной величинѣ r, такъ что время обращенія остается постояннымъ.

Интересно замѣтить, что, при постепенномъ увеличеніи скорости v, шарикъ, описывая все большія и большія окружности, какъ бы поднимается съ одной параллели шаровой поверхности, описанной изъ точки O, на другую, приближаясь къ экватору.

Динамика твердаго тѣла.

§ 220. Переходя къ изученію основъ динамики абсолютно-твердаго тѣла, разсматриваемаго, какъ неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ, изслѣдуемъ сперва въ самомъ общемъ видѣ вопросъ о движеніи свободнаго твердаго тѣла.

Положимъ, что къ различнымъ точкамъ нѣкотораго свободнаго твердаго тѣла приложены силы F_1, F_2, F_3,.... какой угодно величины и какого угодно направленія. Принявъ за центръ приведенія силъ центръ тяжести тѣла, перенесемъ въ него параллельно самимъ себѣ всѣ данныя силы и сложимъ по правиламъ статики, какъ эти силы, такъ и образующіяся при этомъ пары силъ. Въ результатѣ мы получимъ одну равнодѣйствующую силу R, приложенную къ центру тяжести тѣла и одну равнодѣйствующую пару G.

Не останавливаясь на случаѣ равновѣсія ($R = 0$; $G = 0$.), подробно разобранномъ въ статикѣ, разсмотримъ здѣсь три слѣдующихъ случая:

1. Равнодѣйствующая пара силъ $G = 0$, т.-е. всѣ силы приводятся къ одной равнодѣйствующей R, приложенной къ центру тяжести тѣла.

2. Равнодѣйствующая сила $R = 0$, т.-е. всѣ силы приводятся къ одной равнодѣйствующей парѣ G.

3. Всѣ силы приводятся къ равнодѣйствующей силѣ R и равнодѣйствующей парѣ G.

§ 221. **Движеніе свободнаго твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ силы, приложенной къ его центру тяжести. Теорема.** *Если первоначально тѣло было въ покоѣ, то подъ дѣйствіемъ постоянной*

силы R, приложенной къ его центру тяжести, оно получитъ равноускоренное поступательное прямолинейное движенiе по направленiю силы. Чтобы это доказать, замѣтимъ, что въ такомъ движенiи всѣ точки тѣла проходятъ равные и параллельные пути и имѣютъ въ каждый моментъ одинаковую скорость и одинаковое ускоренiе. Это можетъ произойти только въ томъ случаѣ, если къ точкамъ (частицамъ) тѣла приложены параллельныя силы, пропорцiональныя ихъ массамъ m_1, m_2, m_3.... (или ихъ вѣсамъ). Но изъ статики извѣстно, что такiя параллельныя силы складываются въ одну равнодѣйствующую, проходящую черезъ центръ тяжести тѣла, что и слѣдовало доказать.

Опредѣлимъ ускоренiе этого движенiя. Изъ доказательства теоремы слѣдуетъ, что

$$R = m_1 a + m_2 a + m_3 a + ... = a(m_1 + m_2 + m_3 + ...)$$

$$\text{или } R = Ma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

гдѣ $M = m_1 + m_2 + m_3 + ...$ есть масса всего тѣла. Искомое ускоренiе $a = \frac{R}{M}$ или $a = \frac{Rg}{P}$, гдѣ P—вѣсъ тѣла.

Изъ уравненiя (1) слѣдуетъ, что въ поступательномъ движенiи твердаго тѣла центръ тяжести движется какъ матерiальная точка, масса которой равна массѣ всего тѣла и къ которой приложены всѣ силы, дѣйствующiя на тѣло. Мы вскорѣ убѣдимся, что это явленiе представляетъ лишь частный случай чрезвычайно важнаго и общаго закона механики, распространяющагося на какое угодно движенiе не только одного тѣла, но и цѣлой группы изъ нѣсколькихъ тѣлъ, разсматриваемыхъ какъ одна общая система.

§ 222. **Внутреннiя и внѣшнiя силы. Центръ тяжести системы.** Если разсматривается нѣкоторая группа или система изъ двухъ, трехъ или вообще какого угодно числа тѣлъ (или матерiальныхъ точекъ), то силы, происходящiя отъ взаимнаго дѣйствiя этихъ тѣлъ другъ на друга, называются *внутренними*, а силы, происходящiя отъ дѣйствiя другихъ тѣлъ, не входящихъ въ систему, *внѣшними*. Очевидно, что свойства внутреннихъ и внѣшнихъ силъ совершенно одинаковы, такъ какъ такое раздѣленiе ихъ введено лишь для удобства изслѣдованiя различныхъ вопросовъ движенiя и равновѣсiя и вообще имѣетъ чисто условный характеръ. Притяженiе падающаго камня землею есть сила внѣшняя, если мы обращаемъ вниманiе только на движенiе камня, и сила

внутренняя, если разсматриваемъ камень и землю, какъ одну общую систему. Слѣдуетъ замѣтить, что внутреннія силы каждыхъ 2-хъ тѣлъ (или матеріальныхъ частицъ), по закону равенства дѣйствія и противодѣйствія, всегда равны и прямопротивоположны, такъ что сумма проекцій ихъ на какое угодно направленіе всегда равна нулю. Очевидно, что во всякомъ *абсолютно-твердомъ тѣлѣ* внутреннія силы взаимодѣйствія всѣхъ его частицъ всегда находятся въ состояніи равновѣсія, такъ какъ, вслѣдствіе неизмѣняемости разстояній между частицами, сумма работъ внутреннихъ силъ равна нулю.

Если сложимъ по правиламъ статики вѣса всѣхъ тѣлъ, входящихъ въ разсматриваемую систему, то получимъ точку, называемую *центромъ тяжести системы*. При движеніи всей системы центръ тяжести ея перемѣщается по слѣдующему закону, открытому *Ньютономъ*.

§ 223. **Законъ движенія центра тяжести.** *Центръ тяжести свободной системы тѣлъ (или матеріальн. точекъ) движется какъ точка, въ которой сосредоточена масса всей системы и въ которую перенесены параллельно самимъ себѣ всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на систему. Отъ внутреннихъ силъ движеніе центра тяжести не зависитъ.*

Назовемъ черезъ: p', p'', p''',.... вѣса тѣлъ (или матер. точекъ) системы; m', m'', m''',.... массы ихъ; F', F'', F''',.... внѣшнія силы, дѣйствующія на эти тѣла; f', f'', f''',.... внутреннія силы взаимодѣйствія или связи каждаго тѣла системы со всѣми остальными; a', a'', a''',.... ускоренія этихъ тѣлъ; x_0, y_0, z_0,.... координаты центра тяжести системы; x', y', z'; x'', y'', z''..... координаты центровъ тяжести отдѣльныхъ тѣлъ ея.

Изъ статики извѣстно (§ 141), что

$$x_0 = \frac{\Sigma px}{\Sigma p} \text{ или } x_0 = \frac{\Sigma mgx}{\Sigma mg} = \frac{g\Sigma mx}{g\Sigma m} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m},$$

откуда, замѣтивъ, что $\Sigma m = M =$ массѣ всей системы, получимъ:

$$Mx_0 = \Sigma mx \text{ или } Mx_0 = m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ . \ . \ . \ (1).$$

Допустимъ, что по прошествіи весьма малаго промежутка времени Δt произошло весьма малое перемѣщеніе системы, при чемъ центры тяжести системы и ея тѣлъ перемѣстились относительно оси OX на величины Δx_0, $\Delta x'$, $\Delta x''$, такъ что координаты x_0, x', x''.... обратились въ $x_0 + \Delta x_0$, $x' + \Delta x'$, $x'' + \Delta x''$....

Тогда уравненіе (1) приметъ видъ

$$M(x_0 + \Delta x_0) = m'(x' + \Delta x') + m''(x'' + \Delta x'') + \ldots \quad (2).$$

Вычитая почленно первое уравненіе изъ второго и раздѣливъ обѣ части полученнаго равенства на величину промежутка времени Δt, найдемъ:

$$M\frac{\Delta x_0}{\Delta t} = m'\frac{\Delta x'}{\Delta t} + m''\frac{\Delta x''}{\Delta t} + m'''\frac{\Delta x'''}{\Delta t} + \ldots \quad (3).$$

Но отношенія $\frac{\Delta x_0}{\Delta t}$, $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta x''}{\Delta t}$,.... приращеній пройденныхъ пространствъ къ времени представляютъ ничто иное, какъ *среднія скорости* движеній за этотъ промежутокъ времени, предѣлы же этихъ отношеній, при уменьшеніи величины Δt до нуля, означаютъ *скорости*, соотвѣтствующія данному моменту времени (§ 36), т.-е. пред. $\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta t}\right) = v_{ox}$, пред. $\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t}\right) = v'_x$,.... Итакъ, переходя къ предѣламъ, изъ уравненія (3) получимъ:

$$Mv_{ox} = m'v_x' + m''v_x'' + m'''v_x''' + \ldots \quad (4).$$

Допустимъ, что въ теченіе времени Δt скорости v_{ox}, v_x', v_x'' получили весьма малыя приращенія Δv_{ox}, $\Delta v_x'$, $\Delta v_x''$,.... такъ что къ концу этого промежутка онѣ обратились въ $v_{ox} + \Delta v_{ox}$, $v_x' + \Delta v_x'$ ..., тогда изъ уравненія (4) получимъ:

$$M(v_{ox} + \Delta v_{ox}) = m'(v_x' + \Delta v_x') + m''(v_x'' + \Delta v_x'') + \ldots \quad (5).$$

Вычтемъ почленно уравненіе (4) изъ уравненія (5) и раздѣлимъ затѣмъ обѣ части на Δt:

$$M\frac{\Delta v_{ox}}{\Delta t} = m'\frac{\Delta v_x'}{\Delta t} + m''\frac{\Delta v_x''}{\Delta t} + m'''\frac{\Delta v_x'''}{\Delta t} + \ldots \quad (6).$$

Отношенія $\frac{\Delta v_{ox}}{\Delta t}$, $\frac{\Delta v_x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta v_x''}{\Delta t}$,.... приращеній скоростей къ времени суть *среднія ускоренія* для этого промежутка времени, а предѣлы среднихъ скоростей, при уменьшеніи величины промежутка времени Δt до нуля, представляютъ *ускоренія*, соотвѣтствующія конечному моменту времени t.

Поэтому, перейдя къ предѣламъ, изъ ур-ія (6) получимъ

$$Ma_{ox} = m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \ldots = \Sigma ma_x \ldots \quad (7).$$

Разсуждая точно также относительно перемѣщеній тѣлъ системы по осямъ OY и OZ, найдемъ точно такія же уравненія:

$$Ma_{oy} = \Sigma ma_y \ldots (8) \qquad Ma_{oz} = \Sigma ma_z \ldots \quad (9).$$

Но, по началу д'Аламбера, для движенія по оси OX тѣла m', связаннаго съ остальными тѣлами системы и, слѣдовательно, несвободнаго, имѣемъ уравненіе

$$F_x' + f_x' - m'a_x' = 0.$$

Написавъ такія же уравненія для остальныхъ тѣлъ и сложивъ ихъ почленно, получимъ уравненіе проекцій движенія системы $\Sigma F_x + \Sigma f_x = \Sigma m a_x$ или, замѣтивъ, что сумма проекцій Σf_x внутреннихъ силъ, какъ равныхъ и противоположныхъ, равна нулю: $\Sigma F_x = \Sigma m a_x$. Написавъ такія же уравненія проекцій движенія относительно осей OY и OZ и замѣнивъ вторыя части ихъ равными величинами изъ уравненій (7), (8) и (9), получимъ, что

$$\Sigma F_x = M a_{ox};\ \Sigma F_y = M a_{oy};\ \Sigma F_z = M a_{oz}.$$

Возведя эти уравненія въ квадратъ и сложивъ ихъ, найдемъ

$$(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2 = M^2(a^2_{ox} + a^2_{oy} + a^2_{oz})$$

или, извлекая изъ обѣихъ частей квадр. корень:

$$R = M a_0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10),$$

гдѣ R— равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ системы, параллельно перенесенныхъ въ ея центръ тяжести и a_0—ускореніе центра тяжести.

§ 224. Законъ движенія центра тяжести получаетъ особенно замѣчательное значеніе въ томъ случаѣ, когда всѣ внѣшнія силы, перенесенныя въ центръ тяжести, взаимно уравновѣшиваются, т.-е. когда система подвержена дѣйствію однѣхъ внутреннихъ силъ. Такъ какъ движеніе центра тяжести отъ нихъ не зависитъ, то, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, хотя бы отдѣльныя части или тѣла системы и имѣли какія угодно движенія, центръ тяжести ея будетъ *сохранять* положеніе равновѣсія статическаго или динамическаго, т.-е. будетъ находиться въ покоѣ или въ равномѣрномъ и прямолинейномъ движеніи. Вслѣдствіе этого свойства центръ тяжести по предложенію *Леонарда Эйлера* получилъ еще названіе *центра инерціи*.

Закономъ движенія центра тяжести системы объясняются многія интересныя явленія.

Примѣры. 1. Солнечная система подвержена исключительно дѣйствію внутреннихъ силъ притяженій между солнцемъ и планетами, такъ какъ вслѣдствіе громадности разстоянія ея отъ неподвижныхъ звѣздъ притяженіями ихъ можно пренебречь. Поэтому центръ инерціи ея находится въ покоѣ или въ равномѣрномъ

движенiи. Астрономическiя наблюденiя, дѣйствительно, показали, что центръ инерцiи солнечной системы равномѣрно движется къ созвѣздiю Веги. Такое же заключенiе можно сдѣлать и относительно всей вселенной, такъ какъ всѣ силы по отношенiю къ ней суть внутреннiя.

2. Центръ тяжести дроби, вылетающей изъ ружья, движется по той же самой траекторiи, по которой летѣла бы пуля, выпущенная при тѣхъ же самыхъ условiяхъ. Точно также осколки лопнувшей въ воздухѣ гранаты разлетаются во всѣ стороны такимъ образомъ, что центръ тяжести ихъ описываетъ такую же траекторiю, какую описала бы граната, если бы она не разорвалась.

3. Центръ тяжести тѣла свободно падающаго человѣка всегда описываетъ вертикальную траекторiю, несмотря на различныя движенiя рукъ и ногъ.

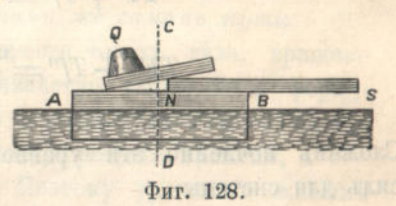
4. Вообразимъ, что на чашкѣ A обыкновенныхъ вѣсовъ стоитъ человѣкъ, уравновѣшенный гирями, помѣщенными на другую чашку B. Если онъ присядетъ, то чашка A поднимется; когда же онъ выпрямится, то чашка опустится. Объясненiе этого явленiя состоитъ въ томъ, что человѣкъ и чашка вѣсовъ представляютъ одну уравновѣшенную систему, положенiе центра тяжести которой должно сохраняться безъ измѣненiя. Подобное же явленiе произойдетъ съ человѣкомъ, уравновѣшеннымъ на чашкѣ пружинныхъ вѣсовъ: при приcѣданiи его пружина поднимется и стрѣлка покажетъ меньшiй вѣсъ; наоборотъ, когда онъ встанетъ во весь ростъ, то вѣсъ его будетъ казаться больше, такъ какъ пружина въ это время опустится.

§ 225. **Движенiе свободнаго твердаго тѣла подъ дѣйствiемъ пары силъ.** Изъ статики извѣстно, что пара силъ сообщаетъ свободному тѣлу вращенiе вокругъ оси, перпендикулярной къ плоскости пары. Это вращательное движенiе, какъ вскорѣ увидимъ, зависитъ не только отъ момента пары и отъ массы тѣла, но также и отъ формы тѣла. Разсмотримъ два слѣдующихъ вопроса: черезъ какую именно точку свободнаго тѣла проходитъ ось вращенiя и не будетъ ли имѣть тѣло, кромѣ вращательнаго движенiя, еще и поступательное. Перенеся обѣ параллельныя силы, составляющiя пару, въ центръ тяжести тѣла, мы получимъ въ этой точкѣ двѣ равныя и противоположныя силы, которыя взаимно уравновѣсятся. Поэтому, если тѣло было въ покоѣ до приложенiя къ нему пары силъ, то центръ

тяжести его, по извѣстному уже намъ закону, останется въ покоѣ и послѣ приложенія пары.

Отсюда слѣдуетъ, что: 1) при дѣйствіи пары силъ тѣло не получаетъ никакого поступательнаго движенія и 2) вращеніе тѣла происходитъ *вокругъ* оси, проходящей черезъ его центръ тяжести, какъ черезъ неподвижную точку.

Этотъ выводъ подтверждается слѣдующимъ опытомъ. На кусокъ дерева AB (фиг. 128), свободно плавающій въ водѣ, положенъ магнитъ NS, уравновѣшенный грузомъ Q. Если вода находится въ совершенно спокойномъ состояніи, то поплавокъ AB съ магнитомъ и грузомъ будетъ медленно поворачиваться около вертикальной оси CD, проходящей черезъ центръ тяжести всей этой системы тѣлъ. Движеніе происходитъ здѣсь исключительно отъ дѣйствія пары силъ, дѣйствующихъ на концы N и S магнита.



Фиг. 128.

Очевидно, что если пара силъ дѣйствуетъ на тѣло, имѣющее неподвижную точку или ось, то вращеніе происходитъ около этой точки или оси.

§ 226. **Движеніе свободнаго твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ постоянной силы, приложенной къ его центру тяжести, и пары силъ.** Этотъ наиболѣе общій случай движенія представляетъ соединеніе двухъ первыхъ. Свободное твердое тѣло будетъ имѣть одновременно два движенія: *поступательное* отъ дѣйствія постоянной силы и *вращательное* отъ дѣйствія пары силъ. Эти два движенія, слагаясь, произведутъ нѣкоторое сложное движеніе тѣла. Сложное движеніе свободнаго твердаго тѣла можетъ быть крайне разнообразнымъ, такъ какъ характеръ его опредѣляется величиною и направленіемъ какъ равнодѣйствующей силы, такъ и равнодѣйствующей пары, а также въ нѣкоторой степени массою и формою тѣла. Вообще, такое движеніе будетъ *винтовымъ*, въ частномъ случаѣ (если сила и пара силъ лежатъ *въ одной плоскости*) переходящимъ въ *катаніе*.

§ 227. **Уравненіе живыхъ силъ для свободной системы.**

Теорему живыхъ силъ, выведенную для одной матеріальной точки, легко распространить на цѣлую систему матеріальныхъ точекъ, замѣтивъ, что каждую точку системы можно считать сво-

бодной, если къ внѣшнимъ силамъ, дѣйствующимъ на систему, присоединить внутреннія силы, замѣняющія связи каждой точки со всѣми остальными. Назовемъ черезъ: m', m'', m''', . . . массы точекъ системы, F', F'', F''', . . . внѣшнія и f', f'', f''', . . . внутреннія силы, дѣйствующія на нихъ; v_0', v_0'', v_0''', . . . начальныя и v', v'', v''', . . . конечныя скорости точекъ. Тогда, считая точки системы свободными, можемъ написать для каждой изъ нихъ уравненіе живыхъ силъ

$$TF' + Tf' = \frac{m'v'^2}{2} - \frac{m'v_0'^2}{2}$$

$$TF'' + Tf'' = \frac{m''v''^2}{2} - \frac{m''v_0''^2}{2}$$

. . . .

Сложивъ почленно эти уравненія, получимъ уравненіе живыхъ силъ для системы:

$$\Sigma TF + \Sigma Tf = \frac{\Sigma mv^2}{2} - \frac{\Sigma mv_0^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

т.-е. *алгебраическая сумма работъ всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, дѣйствовавшихъ на систему въ теченіе нѣкотораго времени, равна измѣненію живой силы системы въ то же самое время*.

§ 228. **Уравненіе живыхъ силъ для свободнаго твердаго тѣла** получается изъ только что найденнаго уравненія (1), положивъ въ немъ $\Sigma Tf = 0$, такъ какъ, вслѣдствіе неизмѣняемости разстояній между точками абсолютно-твердаго тѣла, алгебраическая сумма работъ внутреннихъ силъ всегда равна нулю.

Итакъ, уравненіе живыхъ силъ для твердаго тѣла въ общемъ видѣ будетъ

$$\Sigma TF = \frac{\Sigma mv^2}{2} - \frac{\Sigma mv_0^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Разсмотримъ, какъ измѣняется видъ этого уравненія для различныхъ случаевъ движенія твердаго тѣла.

I. *Поступательное движеніе*. Въ этомъ случаѣ скорости всѣхъ точекъ тѣла одинаковы. Поэтому, вынося въ уравненіи за знакъ Σ квадраты скоростей v^2 и v_0^2, получимъ

$$\Sigma TF = \frac{v^2}{2}\,\Sigma m - \frac{v_0^2}{2}\,\Sigma m$$

или, замѣтивъ, что $\Sigma m = M =$ массѣ всего тѣла, $\Sigma TF = Rs$, гдѣ R — равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ, перенесенныхъ въ центръ тяжести тѣла, а s — перемѣщеніе центра тяжести въ разсматриваемое время:

$$Rs = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

т.-е. *въ поступательномъ движеніи тѣла работа равнодѣйствующей всѣхъ внѣшнихъ силъ на нѣкоторомъ пути равна измѣненію живой силы центра тяжести* (въ которомъ какъ бы сосредоточена вся масса тѣла) *на томъ же самомъ пути.*

II. *Вращательное движеніе.* Скорости точекъ тѣла, вращающагося около нѣкоторой оси, какъ извѣстно, выражаются формулами $v_0 = \omega_0 r$ и $v = \omega r$, гдѣ ω_0 и ω — угловыя скорости вращенія въ началѣ и концѣ разсматриваемаго промежутка времени, а r — разстояніе точки отъ оси вращенія. Поэтому уравненіе живыхъ силъ для вращательнаго движенія будетъ

$$\Sigma TF = \frac{\Sigma m\omega^2 r^2}{2} - \frac{\Sigma m\omega_0^2 r^2}{2}$$

или, вынося постоянныя величины $\frac{\omega^2}{2}$ и $\frac{\omega_0^2}{2}$ за знакъ Σ:

$$\Sigma TF = \frac{\omega^2}{2}\Sigma mr^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\Sigma mr^2 \text{ или } \Sigma TF = \Sigma mr^2\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2}\right) \; . \; . \; (4).$$

Величина Σmr^2, представляющая сумму произведеній изъ массъ всѣхъ точекъ на квадраты разстояній ихъ отъ оси вращенія, называется *моментомъ инерціи тѣла относительно оси* и обозначается буквою J. Такимъ образомъ окончательный видъ уравненія живыхъ силъ для вращательнаго движенія будетъ

$$\Sigma TF = \frac{J}{2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Отсюда слѣдуетъ, что величина работы, затрачиваемой въ вращательномъ движеніи, существенно зависитъ отъ величины момента инерціи. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы подробнѣе разсмотримъ физическое значеніе моментовъ инерціи тѣлъ.

III. *Сложное поступательно-вращательное движеніе*, какъ уже было замѣчено ранѣе, состоитъ изъ соединенія первыхъ двухъ движеній. Работа внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, состоитъ изъ работы равнодѣйствующей силы и работы

равнодѣйствующей пары, получившихся при перенесеніи всѣхъ силъ въ центръ тяжести тѣла. Первая работа измѣняетъ живую силу поступательнаго движенія, тождественнаго съ движеніемъ центра тяжести, а вторая—живую силу вращательнаго движенія вокругъ оси, проходящей черезъ центръ тяжести. Принимая во вниманіе предыдущіе выводы, легко напишемъ уравненіе живыхъ силъ для этого вида движенія твердаго тѣла:

$$\Sigma TF = \frac{M}{2}(v^2 - v_0^2) + \frac{J}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) \quad \ldots \ldots (6).$$

§ 229. **Основное уравненіе вращательнаго движенія твердаго тѣла**. Положимъ, что нѣкоторое твердое тѣло вращается около оси ZZ отъ дѣйствія силъ F_1, F_2, F_3, . . . , какъ угодно приложенныхъ къ различнымъ его точкамъ. Работа силы во вращательномъ движеніи свободной точки, какъ извѣстно (§ 185), равна угловому перемѣщенію ея α, умноженному на моментъ силы относительно оси вращенія, т.-е. $TF = \alpha M_z F$. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ каждая точка тѣла связана со всѣми остальными, то, называя черезъ f равнодѣйствующую внутреннихъ силъ, замѣняющихъ ея связи, получимъ уравненіе работы несвободной вращающейся точки:

$$TF + Tf = \alpha M_z F + \alpha M_z f.$$

Написавъ такія уравненія для каждой точки тѣла и сложивъ ихъ почленно, получимъ:

$$\Sigma TF + \Sigma Tf = \Sigma \alpha M_z F + \Sigma \alpha M_z f.$$

Но алгебраическія суммы работъ внутреннихъ силъ и моментовъ ихъ въ абсолютно твердомъ тѣлѣ равны нулю. Уничтоживъ эти члены и вынеся постоянный множитель α за знакъ Σ, будемъ имѣть

$$\Sigma TF = \alpha \Sigma M_z F \quad \ldots \ldots \ldots (8).$$

Алгебраическая сумма моментовъ внѣшнихъ силъ

$$\Sigma M_z F = M_z F_1 + M_z F_2 + M_z F_3 + \ldots;$$

какъ не трудно замѣтить, всегда можетъ быть замѣнена моментомъ одной силы относительно той же оси. Назовемъ его *равнодѣйствующимъ моментомъ* и обозначимъ буквою D. Тогда

$$\Sigma TF = \alpha D \quad \ldots \ldots \ldots (9).$$

Написавъ уравненіе (5) живыхъ силъ для вращательнаго движенія

$$\Sigma TF = J\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^{\,2}}{2}\right)$$

и замѣтивъ, что для весьма малаго промежутка времени $\triangle t$ (§ 69) конечная угловая скорость $\omega = \omega_0 + i.\triangle t$, а угловое перемѣщеніе $\alpha = \omega_0.\triangle t + \frac{i(\triangle t)^2}{2}$, получимъ

$$\Sigma TF = J\left[\frac{(\omega_0 + i\triangle t)^2}{2} - \frac{\omega_0^{\,2}}{2}\right] = Ji\left[\omega_0.\triangle t + \frac{i.(\triangle t)^2}{2}\right] = Ji\alpha,$$

откуда, принявъ во вниманіе уравненіе (9): $\alpha D = Ji\alpha$, или

$$D = Ji \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Уравненіе (10) представляетъ основное уравненіе вращательнаго движенія тѣла. Оно читается такимъ образомъ: *равнодѣйствующій вращательный моментъ равенъ моменту инерціи тѣла, умноженному на его угловое ускореніе.*

§ 230. Сравнивъ уравненіе (10) съ уравненіемъ поступательнаго движенія тѣла $R = Ma$ (§ 221), приходимъ къ слѣдующему интересному заключенію: какъ при поступательномъ движеніи существуетъ соотношеніе между равнодѣйствующей силой, ускореніемъ тѣла и его массой, такъ точно и при вращательномъ движеніи существуетъ подобное соотношеніе между равнодѣйствующимъ моментомъ, угловымъ ускореніемъ тѣла и его моментомъ инерціи. Слѣдовательно моментъ инерціи имѣетъ значеніе для вращательнаго движенія совершенно подобное тому значенію, которое имѣетъ масса при поступательномъ движеніи.

Изъ уравненія (10) непосредственно выводятся двѣ употребительныя формулы:

$$i = \frac{D}{J} \quad . \quad . \quad . \quad (11) \qquad \text{и} \qquad J = \frac{D}{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Изъ самаго опредѣленія момента инерціи

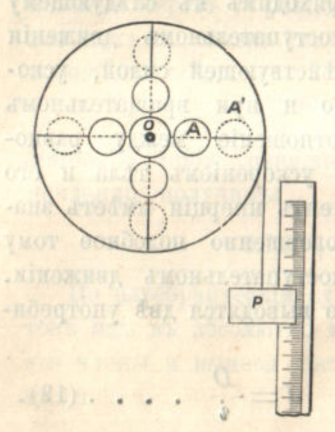
$$J = m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + m_3 r_3^{\,2} + \ . \ . = \Sigma mr^2$$

слѣдуетъ, что величина его (а слѣдовательно, ускореніе и скорость вращательнаго движенія при одномъ и томъ же вращательномъ моментѣ) зависитъ не только отъ величины массы тѣла, но и отъ распредѣленія этой массы относительно оси вращенія. Такимъ образомъ не только тѣла, имѣющія одинаковую массу, но различ-

ную форму, могутъ имѣть различные моменты инерціи, но даже одно и тоже тѣло можетъ имѣть сколько угодно различныхъ моментовъ инерціи въ зависимости отъ того, черезъ какую точку его и въ какомъ направленіи проходитъ ось вращенія.

§ 231. **Механическое значеніе момента инерціи** хорошо выясняется на слѣдующихъ примѣрахъ:

I. Представимъ, что мы держимъ между ладонями довольно длинный, но не очень толстый шестъ въ вертикальномъ положеніи. Соотвѣтственнымъ движеніемъ рукъ очень легко привести шестъ во вращеніе около вертикальной оси и, наоборотъ, съ довольно большимъ трудомъ—около горизонтальной оси. Но за то въ первомъ случаѣ гораздо легче прекратить начавшееся вращеніе, чѣмъ во второмъ. Это явленіе очень просто объясняется тѣмъ, что относительно вертикальной оси моментъ инерціи шеста гораздо меньше, чѣмъ относительно горизонтальной оси, и, слѣдовательно (при одинаковомъ угловомъ ускореніи), въ первомъ случаѣ равнодѣйствующій моментъ будетъ во столько же разъ меньше, чѣмъ во второмъ.



Фиг. 129.

II. Посадимъ свободно на горизонтальную ось колесо, на спицы котораго надѣты четыре массивныхъ шара, а на ободѣ намотанъ шнурокъ съ грузомъ P (фиг. 129). При паденіи груза колесо будетъ вращаться. Какъ скорость v, такъ и ускореніе a на его окружности будутъ, очевидно, во всякій моментъ равны скорости и ускоренію падающаго груза. Угловое ускореніе колеса легко найдется по формулѣ $i = \frac{a}{R}$, гдѣ R—радіусъ колеса. Помѣстивъ рядомъ съ грузомъ рейку съ дѣленіями, можно опредѣлить наблюденіемъ надъ величиной пройденнаго пути въ 1, 2, 3, . . . секунды ускореніе паденія груза, а слѣдовательно и угловое ускореніе колеса. Передвинувъ по спицамъ шары къ ободу на разстояніе AA', немного большее разстоянія OA, увидимъ, что угловое ускореніе колеса значительно уменьшится. Если совокупная масса всѣхъ четырехъ

шаровъ гораздо болѣе массъ втулки, спицъ и обода колеса, такъ что этими послѣдними массами можно было бы пренебречь, то при увеличеніи разстоянія шаровъ въ 2 раза угловое ускореніе уменьшится почти въ 4 раза. Это прямо слѣдуетъ изъ формулы $i = \frac{D}{J}$. Числитель этой дроби, т.-е. вращательный моментъ въ обоихъ случаяхъ имѣетъ одну и ту же величину, а знаменатель— моментъ инерціи $J = \Sigma mr^2$ при передвиженіи шаровъ увеличился въ 4 раза. Терминъ „моментъ инерціи" слѣдуетъ признать очень удачнымъ, такъ какъ свойство этой величины вполнѣ соотвѣтствуетъ основному свойству инерціи—сохранять состояніе покоя или движенія тѣла. Дѣйствительно, чѣмъ значительнѣе величина момента инерціи, тѣмъ труднѣе вывести его изъ состоянія покоя или измѣнить уже существующее его движеніе. Этимъ свойствомъ пользуются, напр., въ маховикахъ, уравнивающихъ ходъ паровыхъ машинъ. Изъ предыдущаго вполнѣ понятно, почему маховики дѣлаются большихъ размѣровъ и почему главная масса ихъ сосредоточена на ободѣ *).

§ 232. Опредѣленіе моментовъ инерціи тѣлъ по формулѣ

$$J = \Sigma mr^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

представляетъ чисто математическую задачу. Дѣйствительно, называя черезъ p, v, m и d—вѣсъ, объемъ, массу и плотность какой-либо частицы тѣла, изъ извѣстныхъ формулъ $m = \frac{p}{g}$ и $p = vd$, находимъ, что $m = \frac{d}{g} v$ или, обозначая $\frac{d}{g}$ черезъ γ, что $m = \gamma v$.

Такимъ образомъ величина $\gamma = \frac{m}{v}$ представляетъ массу, содержащуюся въ единицѣ объема тѣла. Подставляя найденное выраженіе для m въ выраженіе момента инерціи, получимъ $J = \Sigma \gamma vr^2$ или

$$J = \gamma \Sigma vr^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Точно такимъ же образомъ найдемъ общія выраженія моментовъ инерціи матеріальныхъ площадей и линій (§ 140):

$$J = \gamma \Sigma ar^2 \quad \ldots\ldots \quad (3) \qquad J = \gamma \Sigma lr^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

---

*) Интересно замѣтить, что народъ изъ ежедневной практики имѣетъ понятіе о механическомъ значеніи момента инерціи и называетъ его словомъ „махъ" (отъ махать), что видно изъ выраженія „со всего маху".

при чемъ въ выраженіи (3) a и γ означаютъ: элементарную площадку и массу, заключающуюся въ единицѣ площади, а въ выраженіи (4) l и γ означаютъ: элементарный отрѣзокъ и массу, содержащуюся въ единицѣ длины.

Выраженія Σvr^2, Σar^2 и Σlr^2 называются моментами инерціи *геометрическихъ* объемовъ, площадей и линій. Въ отличіе отъ моментовъ инерціи матеріальныхъ объемовъ, площадей и линій будемъ ихъ обозначать черезъ J'.

Способы опредѣленія моментовъ инерціи различныхъ геометрическихъ площадей по формулѣ $J' = \Sigma ar^2$ излагаются обыкновенно въ теоріи сопротивленія матеріаловъ, такъ какъ эти выраженія имѣютъ существенное значеніе при изученіи изгиба тѣлъ.

Здѣсь мы дадимъ формулы лишь для наиболѣе употребительныхъ моментовъ инерціи.

I. *Моментъ инерціи геометрической окружности* относительно оси, проходящей черезъ центръ и перпендикулярной къ плоскости круга, опредѣляется такимъ образомъ: замѣтивъ, что въ общей формулѣ $J' = \Sigma lr^2$ величина r разстоянія элементовъ окружности отъ центра, какъ постоянная, можетъ быть вынесена за знакъ Σ, получимъ $J' = r^2 \Sigma l$, но Σl, какъ сумма элементовъ отрѣзковъ, очевидно, равна $2\pi r$. Итакъ $J' = 2\pi r^3$.

Чтобы получить моментъ инерціи *матеріальной* окружности (напр., проволочнаго кольца), слѣдуетъ найденное выраженіе умножить на γ, т.-е. $J = 2\pi r^3 \gamma$ или $J = 2\pi r\gamma \,.\, r^2$. Такъ какъ $2\pi r\gamma$, очевидно, представляетъ массу M кольца, то окончательно

$$J = Mr^2.$$

Само собою понятно, что точно такое же выраженіе имѣетъ *моментъ инерціи круглаго полаго цилиндра съ весьма тонкими стѣнками* относительно его геометрической оси.

II. *Моментъ инерціи геометрическаго прямоугольника* относительно оси, лежащей въ его плоскости и проходящей черезъ центръ тяжести, равенъ $\frac{bh^3}{12}$, гдѣ b и h — основаніе и высота прямоугольника. Слѣдовательно моментъ инерціи матеріальнаго прямоугольника $J = \frac{bh^3}{12}\gamma = bh\gamma \,.\, \frac{h^2}{12}$ или $J = M\frac{h^2}{12}$.

Моментъ инерціи параллелограмма относительно такой же

оси имѣетъ точно такое же выраженіе, такъ какъ параллелограммъ можно разсматривать какъ перекошенный прямоугольникъ, а перемѣщеніе частей фигуры параллельно оси, очевидно, не измѣняетъ величины ея момента инерціи.

Моментъ инерціи треугольника относительно оси, лежащей въ его плоскости и проходящей черезъ середину высоты, также имѣетъ такое же выраженіе. Дѣйствительно, такъ какъ треугольникъ можно разсматривать какъ половину параллелограмма, то $J = \frac{bh^3}{24}\gamma = \frac{bh\gamma}{2} \cdot \frac{h^2}{12}$ или $J = M\frac{h^2}{12}$.

III. *Моментъ инерціи геометрическаго круга* относительно оси, перпендикулярной къ его плоскости и проходящей черезъ центръ, равенъ $\frac{\pi r^4}{2}$. Отсюда моментъ инерціи матеріальнаго круга (диска) $J = \frac{\pi r^4}{2}\gamma = \pi r^2\gamma \cdot \frac{r^2}{2}$ или $J = M\frac{r^2}{2}$.

IV. *Моментъ инерціи круглаго цилиндра* относительно его геометрической оси имѣетъ такое же выраженіе. Дѣйствительно, такъ какъ цилиндръ можно разсѣчь плоскостями перпендикулярными къ оси на весьма большое число равныхъ весьма тонкихъ матеріальныхъ круговъ (дисковъ), то, называя черезъ M и m массы цилиндра и одного изъ дисковъ, и замѣтивъ, что моментъ инерціи всего тѣла равенъ суммѣ моментовъ инерціи всѣхъ его частей относительно одной и той же оси, получимъ

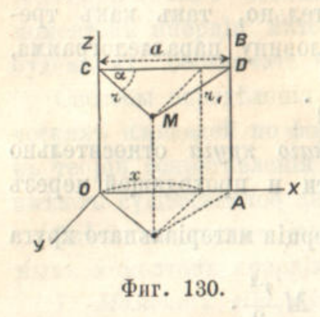
$$J = \Sigma\frac{mr^2}{2} = \frac{r^2}{2}\Sigma m \quad \text{или} \quad J = M\frac{r^2}{2}.$$

V. *Моментъ инерціи конуса* относительно его геометрической оси $J = 0{,}3Mr^2$.

Моментъ инерціи шара относительно его діаметра $J = 0{,}4Mr^2$. Интересно замѣтить, что при равныхъ массахъ и радіусахъ моменты инерціи конуса, шара и цилиндра относятся между собою какъ $3:4:5$, т.-е. какъ стороны египетскаго треугольника.

§ 233. **Зависимость между моментами инерціи относительно параллельныхъ осей.** *Моментъ инерціи тѣла относительно какой-либо оси равенъ моменту инерціи его относительно параллельной оси, проходящей черезъ центръ тяжести, сложенному съ произведеніемъ изъ массы тѣла на квадратъ разстоянія между осями.*

Положимъ, что намъ извѣстенъ моментъ инерціи J нѣкотораго тѣла относительно оси OZ, проходящей черезъ его центръ тяжести. Требуется найти моментъ инерціи этого же тѣла относительно другой оси AB, параллельной первой и отстоящей отъ нея на разстояніи a. Проведемъ черезъ центръ тяжести три оси координатъ такъ, чтобы ось OZ совпала съ осью вращенія, ось OX пересѣкала вторую ось AB, а ось OY была перпендикулярна къ плоскости XOZ (фиг. 130).



Фиг. 130.

Обозначивъ разстоянія нѣкоторой матеріальной точки M тѣла отъ осей черезъ r и r_1, изъ треугольника MCD получимъ, что

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha \quad \text{или}$$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ax,$$

гдѣ x — координата точки M. Моментъ инерціи тѣла относительно оси AB будетъ

$$J_1 = \Sigma m r_1^2 = \Sigma m r^2 + \Sigma m a^2 - \Sigma m 2ax.$$

Но $\Sigma m r^2 = J$, т.-е. моменту инерціи относительно оси OZ, проходящей черезъ центръ тяжести; выраженіе $\Sigma m a^2 = a^2 \Sigma m = a^2 M$; наконецъ выраженіе $\Sigma m\, 2ax = 2a \Sigma m x = 0$. Дѣйствительно, $\Sigma m x$, какъ извѣстно, равно Mx_0, гдѣ x_0 — координата центра тяжести тѣла. Но въ нашемъ случаѣ центръ тяжести совпадаетъ съ началомъ координатъ, поэтому $x_0 = 0$, а слѣдовательно и $\Sigma m x = 0$.

Итакъ $$J_1 = J + Ma^2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что моментъ инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести, есть *наименьшій* изъ моментовъ инерціи относительно всѣхъ другихъ параллельныхъ осей.

Съ помощью этой теоремы легко найти моментъ инерціи тѣла относительно произвольной оси, если извѣстны: моментъ инерціи его относительно параллельной оси, проходящей черезъ центръ тяжести, и разстояніе между обѣими осями.

Напр., моментъ инерціи цилиндра относительно оси, параллельной его геометрической оси и отстоящей отъ нея на разстояніи $\frac{2}{3}r$ равенъ $J = M\frac{r^2}{2} + M\frac{4}{9}r^2 = M\frac{17}{18}r^2$.

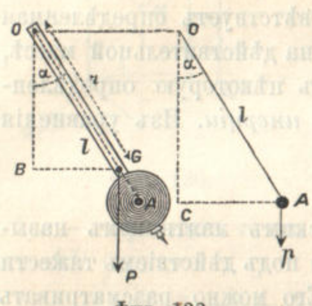
§ 234. **Приведенная масса. Радіусъ инерціи.** Массою тѣла, *приведенною* къ радіусу ρ, называется такая воображаемая масса, которую надо сосредоточить въ точкѣ, отстоящей отъ оси вращенія на разстояніи ρ, чтобы ея моментъ инерціи былъ бы такой же какъ и у даннаго тѣла. Называя эту массу черезъ μ, изъ уравненія $\mu\rho^2 = J$, получимъ $\mu = \frac{J}{\rho^2}$. Отсюда видно, что величина приведенной массы зависитъ отъ величины радіуса ρ, т.-е. каждому ρ соотвѣтствуетъ опредѣленная величина приведенной массы и, наоборотъ, каждой приведенной массѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная величина ρ. Если приведенная масса равна дѣйствительной массѣ, т.-е. $\mu = M$, то радіусъ ρ обращается въ нѣкоторую опредѣленную величину R, называемую *радіусомъ инерціи*. Изъ уравненія $J = MR^2$, находимъ, что $R = \sqrt{\frac{J}{M}}$.

§ 235. **Физическій маятникъ.** Физическимъ маятникомъ называется всякое твердое тѣло, совершающее подъ дѣйствіемъ тяжести колебанія около горизонтальной оси. Его можно разсматривать какъ сложный маятникъ, представляющій совокупность множества простыхъ маятниковъ различной длины, совершающихъ свои размахи въ одно и то же время. Если бы эти маятники были свободны (фиг. 131), то они совершали бы свои качанія въ различное время: болѣе короткіе качались бы быстрѣе болѣе длинныхъ. Такъ какъ въ дѣйствительности времена качанія всѣхъ маятниковъ одинаковы, то отсюда слѣдуетъ заключить, что, вслѣдствіе взаимной связи между собою всѣхъ матеріальныхъ точекъ, короткіе маятники ускоряютъ движенія болѣе длинныхъ, и, наоборотъ, болѣе длинные маятники замедляютъ движенія болѣе короткихъ. Легко понять, что существуетъ въ физическомъ маятникѣ такая точка, для которой вліяніе верхнихъ точекъ, ускоряющихъ ея движеніе, уравновѣшивается вліяніемъ нижнихъ точекъ, замедляющихъ его. Такая замѣчательная точка, качающаяся такъ, какъ если бы она была одна и другихъ точекъ не существовало, называется *центромъ качанія* физическаго маятника. Движеніе ея, а слѣдовательно и движеніе всего физическаго маятника, совершенно одинаково съ движеніемъ простого или математическаго маятника, длина котораго равна разстоянію отъ центра качанія до точки привѣса. Най-


Фиг. 131.

демъ эту длину, а также время одного качанія физическаго маятника.

Положимъ, что физическій маятникъ, имѣющій, напр., форму обыкновеннаго маятника висячихъ часовъ, и воображаемый простой маятникъ, длина котораго $l = AO$, отклонены на одинаковый уголъ α (фиг. 132). Оба маятника будутъ качаться совершенно одинаково и, слѣдовательно, будутъ имѣть одинаковое угловое ускореніе i. Величина этого ускоренія получится изъ формулы $i = \frac{D}{J}$, выведенной для вращательнаго движенія (§ 230). Для физическаго маятника вращательный моментъ $D = P.BG = Mgr\sin\alpha$, гдѣ r—разстояніе центра тяжести G отъ точки привѣса O. Для простого маятника $D' = pl\sin\alpha = mgl\sin\alpha$. Моментъ инерціи простого маятника, очевидно, равенъ ml^2.



Фиг. 132.

Итакъ имѣемъ два значенія одного и того же углового ускоренія:

$$i = \frac{Mgr\sin\alpha}{J} \quad \text{и} \quad i = \frac{mgl\sin\alpha}{ml^2} = \frac{g\sin\alpha}{l}.$$

Слѣдовательно $\frac{Mgr\sin\alpha}{J} = \frac{g\sin\alpha}{l}$ или $\frac{Mr}{J} = \frac{1}{l}$, откуда длина AO физическаго маятника $l = \frac{J}{Mr}$ . . . . (1)

Время качанія его $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{J}{Mgr}}$ или $t = \pi\sqrt{\frac{J}{Pr}}$. (2)

Замѣтимъ, что центръ качанія маятника всегда находится дальше отъ точки привѣса, чѣмъ центръ тяжести, т.-е. $l > r$. Дѣйствительно, замѣнивъ въ равенствѣ (1) величину J момента инерціи маятника относительно оси вращенія, проходящей черезъ точку O привѣса, равною ей величиною $J_0 + Mr^2$, гдѣ J_0 — моментъ инерціи маятника относительно параллельной оси, проходящей черезъ центръ тяжести, получимъ, что $l = \frac{J_0 + Mr^2}{Mr} = \frac{J_0}{Mr} + r$, откуда $l - r = \frac{J_0}{Mr}$ . . . . (3)

§ 236. **Взаимность центра качанія и точки привѣса маятника. Оборотный маятникъ.** Хр. Гюйгенсъ нашелъ, что центръ A качанія и точка O привѣса маятника обладаютъ замѣчательнымъ свойствомъ взаимности, состоящимъ въ томъ, что если оборотить маятникъ и подвѣсить его за центръ A, то прежняя точка O привѣса будетъ центромъ качанія, т.-е. длина физическаго маятника при этомъ не измѣняется. Докажемъ это.

Такъ какъ разстояніе новой точки A привѣса отъ центра тяжести маятника равно $l-r$, то длина перевернутаго физич. маятника $l_1 = \frac{J_1}{M(l-r)}$, гдѣ новый моментъ инерціи $J_1 = J_0 + M\,(l-r)^2$. Подставивъ это значеніе J_1 въ предыдущую формулу, получимъ, что

$$l_1 = \frac{J_0 + M(l-r)^2}{M\,(l-r)} = \frac{J_0}{M(l-r)} + (l-r).$$

Но такъ какъ изъ (3)

$$l-r = \frac{J_0}{Mr}, \text{ то } \frac{J_0}{M(l-r)} = \frac{J_0 . Mr}{M . J_0} = r.$$

Поэтому $l_1 = r + l - r$ или $l_1 = l$, что и слѣдовало доказать.

На этомъ свойствѣ основано опредѣленіе длины физическаго маятника путемъ опыта. Англійскій механикъ *Катеръ* устроилъ маятникъ, названный имъ *оборотнымъ*. На стержнѣ его вблизи концовъ помѣщены двѣ треугольныя призмы, обращенныя острыми ребрами другъ къ другу. Одна изъ этихъ призмъ подвижная, а другая неподвижная. Подвѣсивъ маятникъ за ребро неподвижной призмы, опредѣляютъ число его качаній въ извѣстное время, напр., въ минуту. Затѣмъ, перевертываютъ маятникъ и вѣшаютъ его на ребро другой призмы и снова считаютъ число качаній въ минуту.

Если получается другое число качаній, то, увеличивая или уменьшая разстояніе между призмами, достигаютъ того, что числа качаній въ обоихъ положеніяхъ маятника будутъ одинаковы въ одно и то же время. Тогда разстояніе между остріями призмъ и представитъ длину физическаго маятника.

§ 237. **Живая сила катящагося тѣла.** Положимъ, что нѣкоторое тѣло (напр., колесо, цилиндръ, шаръ) катится прямолинейно и

равномѣрно по горизонтальной плоскости. Какъ извѣстно, такое движенiе есть сложное изъ поступательнаго и вращательнаго.

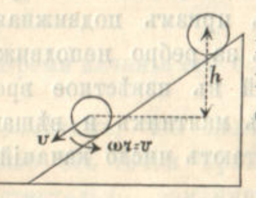
Если это катанiе происходитъ *безъ скольженiя*, т.-е. если путь, проходимый въ произвольный промежутокъ времени какой-либо точкой тѣла (напр., его центромъ тяжести) въ поступательномъ движенiи равенъ пути, проходимой въ тоже самое время точкой его окружности во вращательномъ движенiи, то скорости обоихъ движенiй равны между собою, т.-е. $v = \omega r$, откуда $\omega = \frac{v}{r}$, гдѣ v — скорость поступательнаго движенiя, ω — угловая скорость и r — радiусъ катящагося круга. Слѣдовательно уравненiе живыхъ силъ для катящагося тѣла будетъ (§ 228; III):

$$T = \frac{M}{2} v^2 + \frac{J}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{J}{r^2}\right),$$

но, какъ извѣстно, $\frac{J}{r^2} = \mu$, т.-е. массѣ, приведенной къ радiусу катящагося круга. Поэтому

$$T = \frac{v^2}{2}(M + \mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Положимъ, что катящееся тѣло есть цилиндръ. Такъ какъ моментъ инерцiи его относительно оси вращенiя $J = \frac{Mr^2}{2}$, то приведенная масса $\mu = \frac{M}{2}$ и, слѣдовательно $T = \frac{3}{4} Mv^2$.



Фиг. 133.

Если тѣло скатывается съ высоты h по наклонной плоскости отъ собственнаго вѣса (фиг. 133), то, пренебрегая тренiемъ, получимъ

$$Ph = (M + \mu)\frac{v^2 - v_0^2}{2},$$

гдѣ $P = Mg$ есть вѣсъ тѣла. Если начальная скорость $v_0 = O$, то въ случаѣ, если катящееся тѣло—цилиндръ, находимъ

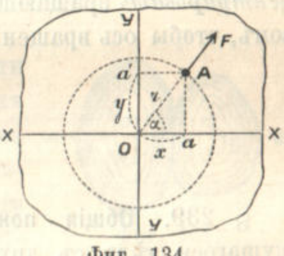
$Mgh = \frac{3}{4} Mv^2$, откуда конечная скорость

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g h} = \sqrt{2g\left(\frac{2}{3} h\right)},$$

т.-е. равна той скорости, которую получило бы тѣло, свободно падающее съ высоты $\frac{2}{3}h$.

§ 238. **Центробѣжная сила при вращеніи твердаго тѣла.** Положимъ, что нѣкоторое твердое тѣло вращается съ постоянной угловой скоростью ω вокругъ оси ZZ. При этомъ каждая точка его развиваетъ соотвѣтственную ей центробѣжную силу. Постараемся опредѣлить равнодѣйствующую этихъ силъ или, иначе говоря, центробѣжную силу всего тѣла.

Проведемъ черезъ ось вращенія двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости XZ и YZ и черезъ какую-нибудь точку O оси ZZ третью плоскость XOY, перпендикулярную къ оси. Опредѣлимъ центробѣжную силу какой-нибудь точки A тѣла, лежащей въ плоскости XOY (Фиг. 134). Если масса ея m, разстояніе отъ оси r, скорость $v = \omega r$, то центробѣжная сила $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$. Перенесемъ эту силу по ея направленію до пересѣченія съ осью ZZ и разложимъ на двѣ составляющія: по оси OX, равную $m\omega^2 r \cos\alpha = m\omega^2 x$, и по оси OY, равную $m\omega^2 r \sin\alpha = m\omega^2 y$ (гдѣ x и y—координаты точки A, α — уголъ между r и осью OX). Сдѣлавъ то же самое для всѣхъ другихъ точекъ тѣла, лежащихъ какъ въ сѣченіи XOY, такъ и во всѣхъ другихъ параллельныхъ сѣченіяхъ тѣла, получимъ двѣ системы параллельныхъ силъ: $m_1\omega^2 x_1$, $m_2\omega^2 x_2$, ..., лежащихъ въ плоскости XZ, и $m_1\omega^2 y_1$, $m_2\omega^2 y_2$, ..., лежащихъ въ плоскости YZ. Сложивъ силы каждой системы, получимъ двѣ равнодѣйствующія R_1 и R_2, причемъ



Фиг. 134.

$$R_1 = \Sigma m\omega^2 x = \omega^2\, \Sigma mx \text{ и } R_2 = \Sigma m\omega^2 y = \omega^2\, \Sigma my,$$

или замѣтивъ, что $\Sigma mx = Mx_0$ и $\Sigma my = My_0$, гдѣ M—масса всего тѣла, x_0 и y_0—координаты его центра тяжести:

$$R_1 = M\omega^2 x_0,\ R_2 = M\omega^2 y_0.$$

Эти двѣ силы R_1 и R_2, вообще говоря, не лежатъ въ одной плоскости, а слѣдовательно не могутъ быть сложены въ одну силу, а могутъ только быть приведены къ одной силѣ и одной парѣ.

§ 233. Исключеніе представляетъ тотъ случай когда вращающееся тѣло имѣетъ плоскость симметріи, перпендикулярную къ оси вращенія (цилиндръ, эллипсоидъ и т. п.). Тогда сила R_1, какъ равнодѣйствующая двухъ совершенно одинаковыхъ группъ параллельныхъ силъ, лежащихъ по обѣ стороны плоскости симметріи, сама будетъ лежать въ этой плоскости. То же самое можно сказать ѻ силѣ R_2. Итакъ, силы R_1 и R_2 лежатъ въ одной плоскости и взаимно-перпендикулярны, а слѣдовательно, ихъ равнодѣйствующая

$$R = \sqrt{R_1{}^2 + R_2{}^2} = \sqrt{(\omega^2 M x_0)^2 + (\omega^2 M y_0)^2} = \omega^2 \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2} \text{ *)}$$

или, называя черезъ k разстояніе отъ центра тяжести до оси вращенія:

$$R = M\omega^2 k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Итакъ, *полная центробѣжная сила тѣла равна его массѣ, умноженной на квадратъ угловой скорости и на разстояніе центра тяжести отъ оси вращенія*. Если разстояніе $k = O$, то и центробѣжная сила тѣла $R = O$. Во всѣхъ другихъ случаяхъ центробѣжная сила, быстро возрастающая при увеличеніи угловой скорости вращенія, производитъ перемѣнное давленіе на ось и расшатываетъ ее. Поэтому на практикѣ прилагаютъ старанія, чтобы *центрировать* вращающіяся тѣла, т. е, размѣщать ихъ такимъ образомъ, чтобы ось вращенія проходила черезъ ихъ центры тяжести.

Ударъ тѣлъ.

§ 239. **Общія понятія и опредѣленія.** При встрѣчѣ движущагося тѣла съ другимъ тѣломъ движущимся или покоящимся, происходитъ явленіе, называемое *ударомъ*. Ударъ представляетъ весьма сложное физическое явленіе, состоящее въ измѣненіи скорости тѣлъ, въ измѣненіи ихъ формы, доходящемъ иногда до разрушенія, въ проявленіи внутреннихъ силъ взаимодѣйствія частицъ тѣлъ. Ударъ вызываетъ явленія звука, теплоты, иногда свѣта (удары стали о кремень и проч.). Здѣсь мы ограничимся по отношеніи къ удару разсмотрѣніемъ только одного чисто механическаго вопроса, а именно разсмотрѣніемъ измѣненія скоростей

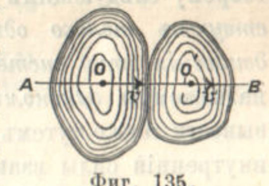
---

*) Отсюда видно, что полная центробѣжная сила тѣла проходитъ черезъ его центръ тяжести.

тѣлъ послѣ удара. Но и при такомъ, значительно упрощенномъ изученіи вопроса объ ударѣ, мы не можемъ разсматривать соударяющіяся твердыя тѣла, какъ абсолютно-твердыя, но должны принимать во вниманіе способность ихъ измѣнять свою форму. Съ этой точки зрѣнія тѣла раздѣляютъ на двѣ группы. Первую группу составляютъ *тѣла неупругія*, т.-е. неспособныя дѣйствіемъ своихъ внутреннихъ силъ возстановлять свою первоначальную форму, измѣненную при ударѣ. Во вторую группу входятъ *вполнѣ упругія тѣла*, возстановляющія безъ измѣненія свою форму, благодаря присущей имъ внутренней силѣ упругости.

Строго говоря, не существуетъ ни вполнѣ неупругихъ, ни вполнѣ упругихъ тѣлъ. Всѣ тѣла болѣе или менѣе упруги, т.-е. различаются между собою только большею или меньшею степенью своей упругости. Если полную упругость обозначимъ черезъ *1*, а отсутствіе упругости черезъ *0*, то величины упругости различныхъ тѣлъ будутъ выражаться въ видѣ правильныхъ дробей. Упругость слоновой кости, принадлежащей къ наиболѣе упругимъ тѣламъ, выражается дробью 0,88; упругость стали 0,55; упругость свинца, олова, большинство древесныхъ породъ представляетъ весьма малыя дроби.

Прямая, нормальная къ поверхности ударяющихся тѣлъ въ начальной точкѣ ихъ соприкосновенія, называется *линіей удара*. Если линія *AB* удара совпадаетъ съ направленіями скоростей центровъ тяжести тѣлъ или параллельна имъ, то ударъ называется *прямымъ* (фиг. 135), а если линія удара образуетъ углы съ направленіями этихъ скоростей, то *косымъ* (фиг. 136). Если центры тяжести тѣлъ лежатъ на линіи удара, то ударъ называется *центральнымъ*, въ противоположномъ же случаѣ — *боковымъ* (фиг. 137). Такъ какъ нормаль къ шаровой поверхности направлена по радіусу, то ударъ двухъ шаровъ всегда центральный. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ говорить только о центральномъ ударѣ тѣлъ.



Фиг. 135.

§ 240. Общая теорема удара тѣлъ. Законъ сохраненія количествъ движенія. Положимъ, что два тѣла *A* и *B* (фиг. 135), массы которыхъ обозначимъ черезъ *M* и *m*, движутся въ одну

Фиг. 137.

сторону съ соотвѣтствующими скоростями V и v, гдѣ $V > v$, такъ что черезъ нѣкоторое время тѣло A настигнетъ тѣло B. Въ этотъ моментъ между тѣлами произойдетъ ударъ, вслѣдствіе чего скорости ихъ измѣнятся: скорость тѣла B увеличится отъ толчка, даннаго тѣломъ A, а скорость тѣла A уменьшится вслѣдствіе противодѣйствія тѣла B. Назовемъ скорость тѣла A послѣ удара черезъ V_1, а скорость тѣла B черезъ v_1. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что $V_1 < V$, а $v_1 > v$. Измѣненіе количества движенія перваго тѣла послѣ удара равно $M(V - V_1)$, а второго $m\ (v_1 - v)$. Такъ какъ эти измѣненія количествъ движенія произошли отъ дѣйствія одного и того же импульса удара Pt, гдѣ P—сила, а t—время удара, то они равны между собою, т.-е. $MV - MV_1 = mv_1 - mv$, откуда получимъ, что

$$MV + mv = MV_1 + mv_1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

т.-е. *сумма количествъ движенія тѣлъ до удара равна суммѣ количествъ движенія ихъ послѣ удара.*

Разсматривая оба тѣла, какъ одну общую систему, и обративъ вниманіе на то, что ударъ происходитъ отъ дѣйствія однѣхъ *внутреннихъ* силъ этой системы *), можемъ обобщить доказанную теорему слѣдующимъ образомъ: *Если на систему тѣлъ дѣйствуютъ только однѣ внутреннія силы, то общее количество движенія этой системы сохраняется неизмѣннымъ.* Эту теорему, называемую *закономъ сохраненія количествъ движенія*, можно вывести также путемъ слѣдующаго простого разсужденія. Такъ какъ внутреннія силы взаимодѣйствія всегда равны и прямо противоположны, то алгебраическая сумма импульсовъ ихъ равна нулю и, слѣдовательно, отъ дѣйствія однѣхъ внутреннихъ силъ никакого измѣненія общаго количества движенія всей системы не произойдетъ.

§ 241. **Ударъ неупругихъ тѣлъ.** При ударѣ неупругихъ тѣлъ скорость ударяющаго тѣла постепенно уменьшается, а ударяемаго тѣла—постепенно увеличивается. При этомъ давленіе перваго тѣла на второе, а также и равное ему въ каждый моментъ противодѣйствіе второго тѣла будутъ уменьшаться и обратятся въ нули, когда скорости обоихъ тѣлъ сравняются. Во все время удара

---

*) *Внѣшними* силами тренія и тяжести тѣлъ можно пренебречь, вслѣдствіе ихъ незначительности въ сравненіи съ величинами внутреннихъ силъ.

форма тѣлъ измѣняется: они будутъ постепенно сплющиваться, начиная съ поверхностей соприкосновенія. По прекращеніи удара оба тѣла, измѣнивъ болѣе или менѣе свой видъ, будутъ двигаться вмѣстѣ съ общей скоростью, которую назовемъ черезъ u.

По закону сохраненія количествъ движенія имѣемъ

$$MV + mv = Mu + mu,$$

откуда

$$u = \frac{MV + mv}{M + m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Если тѣла двигались не по одному направленію, а на встрѣчу другъ другу, то величину одной изъ скоростей, напр. v, слѣдуетъ взять съ отрицательнымъ знакомъ. Въ этомъ случаѣ общая скорость тѣлъ послѣ удара

$$u = \frac{MV - mv}{M + m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2').$$

Величины скоростей, потерянной ударяющимъ тѣломъ и пріобрѣтенной ударяемымъ, выразятся слѣдующими формулами:

$$V - u = \frac{m}{M + m}(V - v) \quad . \quad . \quad (3); \qquad u - v = \frac{M}{M + m}(V - v) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

§ 242. Частные случаи удара неупругихъ тѣлъ.

I. *Массы тѣлъ равны между собою ($M = m$).* Въ этомъ случаѣ

$$u = \frac{V + v}{2} \qquad \text{или} \qquad u = \frac{V - v}{2}, \text{ т.-е.}$$

общая скорость равныхъ неупругихъ тѣлъ послѣ удара равна *полусуммѣ* начальныхъ скоростей, если тѣла двигались по одному направленію, и *полуразности*, если они двигались другъ другу на встрѣчу.

Если начальныя скорости были равны по величинѣ ($V = v$), то, въ первомъ случаѣ движенія, ударъ, очевидно, не произойдетъ, а во второмъ случаѣ, общая скорость послѣ удара $u = O$, т.-е. оба тѣла остановятся.

Если одно изъ тѣлъ, напр. второе, находилось до удара въ покоѣ ($v = O$), то $u = \frac{V}{2}$, т.-е. послѣ удара оба тѣла будутъ

двигаться со скоростью, равной половинѣ скорости ударившаго тѣла.

II. *Массы тѣлъ не равны между собою* ($M > m$) *и одно изъ нихъ находилось въ покоѣ* ($V = o$). При этомъ

$$u = \frac{mv}{M + m}.$$

Если масса M неподвижнаго тѣла гораздо болѣе массы m ударяющаго тѣла, то общая скорость послѣ удара представляетъ весьма малую дробь. Считая ее равною нулю ($u = O$), получимъ, что послѣ удара малымъ тѣломъ по неподвижному большому тѣлу, первое остановится, не приведя въ движеніе второго, такъ что большая неподвижная масса какъ бы обладаетъ способностью поглощать ударъ. Такой случай представляетъ ударъ молотка о неподвижную массивную наковальню.

§ 243. **Потеря живой силы при ударѣ неупругихъ тѣлъ.** Неупругія тѣла, какъ уже было замѣчено, при ударѣ измѣняютъ окончательно свою форму (деформируются), а иногда даже и разрушаются. Работа, состоящая въ измѣненіи вида тѣлъ или работа деформаціи, очевидно, производится на счетъ той живой силы, которой обладали оба тѣла до удара. Отсюда понятно, что, при ударѣ неупругихъ тѣлъ, часть живой силы ихъ теряется или, лучше сказать, переходитъ въ работу деформаціи этихъ тѣлъ *). Такимъ образомъ, вычисливъ потерю живой силы при ударѣ, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ и работу деформаціи.

До удара сумма живыхъ силъ тѣлъ была $\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$, а послѣ удара $\frac{(M + m)u^2}{2}$ или, подставивъ значеніе u изъ равенства (2):

$$\frac{(MV + mv)^2}{2\ (M + m)}.$$

---

*) Нѣкоторая часть этой живой силы при ударѣ преобразуется также въ работу колебательныхъ движеній частицъ тѣлъ, выражающуюся въ видѣ звука, теплоты, свѣта. Вслѣдствіе сравнительной незначительности этой части живой силы, величину ея обыкновенно не принимаютъ въ разсчетъ.

Поэтому потеря живой силы или работа деформаціи:

$$T_1 = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{(MV+mv)^2}{2(M+m)} =$$

$$\frac{Mm}{2(M+m)}(V^2 + v^2 - 2Vv)$$

или окончательно

$$T_1 = \frac{Mm}{2(M+m)}(V-v)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Если тѣла двигались до удара на встрѣчу другъ другу, то скорость v слѣдуетъ взять съ отрицательнымъ знакомъ, такъ что въ этомъ случаѣ

$$T_1 = \frac{Mm}{2(M+m)}(V+v)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5').$$

Замѣтивъ, что выраженія $V-v$ и $V+v$ представляютъ собою относительныя скорости ударяющихся тѣлъ, заключаемъ, что *потеря живой силы при ударѣ неупругихъ тѣлъ пропорціанальна квадрату ихъ относительной скорости.* Подставивъ въ формулы (5) и (5′) вмѣсто M и m равныя имъ величины $\frac{P}{g}$ и $\frac{p}{g}$, получимъ употребительную формулу работы деформаціи

$$T_1 = \frac{Pp}{P+p} \cdot \frac{(V \mp v)^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5'').$$

§ 244. Разсмотримъ болѣе подробно случай работы деформаціи, чаще всего встрѣчающійся на практикѣ, а именно тотъ, когда одно изъ тѣлъ, напр. A, было до удара неподвижнымъ. Живая сила ударяющаго тѣла B (а слѣдовательно, и запасъ той работы, которую оно можетъ произвести) $T = \frac{mv^2}{2}$. Потеря живой силы при ударѣ или работа деформаціи, получаемая изъ равенства (5), полагая въ немъ $V = O$, будетъ $T_1 = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}$. Остатокъ живой силы послѣ удара, т.-е. та работа T_2, которую могутъ произвести движущіяся тѣла послѣ удара, находится простымъ вычитаніемъ *):

$$T_2 = T - T_1 = \frac{mv^2}{2} - \frac{Mmv^2}{2(M+m)}, \text{ откуда } T_2 = \frac{m^2v^2}{2(M+m)}.$$

*) Величину T_2 легко опредѣлить и непосредственно: $T_2 = \frac{(M+m)u^2}{2}$ или, замѣтивъ, что $u = \frac{mv}{M+m}$, $T_2 = \frac{M+m}{2} \frac{m^2v^2}{(M+m)^2} = \frac{m^2v^2}{2(M+m)}$.

Выраженіямъ работъ T_1 и T_2 можно придать болѣе удобный для изслѣдованія видъ. Замѣтивъ, что

$$T_1 = \frac{TM}{M+m} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{Tm}{M+m},$$

раздѣлимъ числителя и знаменателя первой дроби на M, а второй на m. Тогда

$$T_1 = \frac{T}{1+m:M} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{T}{1+M:m}$$

или $$T_1 = \frac{T}{1+\frac{p}{P}} \quad . \; . \; . \; . \; (6) \qquad T_2 = \frac{T}{1+\frac{P}{p}} \quad . \; . \; . \; . \; (7).$$

На практикѣ пользуются дѣйствіями удара для работъ двоякаго рода. Работы перваго рода состоятъ въ измѣненіи вида тѣлъ, напр., при ковкѣ, чеканкѣ и штамповкѣ металловъ, при раздробленіи тѣлъ и т. п. Такого рода работа деформаціи T_1, какъ видно изъ равенства (6), будетъ тѣмъ больше или производительнѣе, чѣмъ менѣе будетъ отношеніе $\frac{p}{P}$, т.-е. чѣмъ вѣсъ ударяющаго тѣла будетъ менѣе вѣса неподвижнаго тѣла. Этимъ отчасти и объясняется, почему наковальнямъ даютъ такую массивную форму.

Работы второго рода состоятъ въ перемѣщеніи тѣлъ послѣ удара и преодолѣніи при этомъ сопротивленій, что происходитъ, напр., при забивкѣ свай въ землю, вбиваніи гвоздей, клиньевъ и проч. Такія работы, обозначенныя нами черезъ T_2, въ противоположность первымъ, будутъ тѣмъ производительнѣе, чѣмъ меньше будетъ отношеніе $\frac{P}{p}$, какъ это слѣдуетъ изъ равенства (7), т.-е. чѣмъ вѣсъ неподвижнаго тѣла будетъ менѣе вѣса ударяющаго тѣла. Такимъ образомъ, при вбиваніи гвоздей выгодно, чтобы вѣсъ молотка былъ гораздо болѣе вѣса гвоздя и т. п.

§ 245. Для поясненія предыдущихъ выводовъ рѣшимъ двѣ практическія задачи, относящіяся къ удару неупругихъ тѣлъ.

I. *Ковка металла.* Паровымъ молотомъ, вѣсомъ въ $P = 2000$ килограммовъ, свободно падающимъ безъ начальной скорости съ высоты $h = 2$ м., проковывается кусокъ желѣза. Вѣсъ этого куска

и наковальни $P_1 = 18000$ килогр. Требуется опредѣлить полезную работу молота.

Полная работа молота при ударѣ $T = Ph = 4000$ кгрмм. Потеря живой силы при ударѣ или работа деформаціи:

$$T_1 = \frac{T}{1 + \frac{P}{P_1}} = \frac{4000}{1 + \frac{2000}{18000}} = 3600 \text{ кгрмм.}$$

Безполезная работа (сотрясеніе фундамента, сбиваніе наковальни и проч.) $T_2 = T - T_1 = 400$ кгрмм. или 10% полной работы.

II. *Забивка свай*. Баба копра, свободно падая съ высоты $H = 3$ метра, углубляетъ своимъ ударомъ сваю на $h = 0{,}02$ метр. Зная, что вѣсъ бабы $p = 1000$ килогр., а вѣсъ сваи $P = 200$ килогр., опредѣлить полезную работу бабы, а также сопротивленіе k грунта. Полная работа бабы $T = pH = 3000$ кгрмм.

Полезная работа, идущая на забивку сваи:

$$T_2 = \frac{T}{1 + \frac{P}{p}} = \frac{p^2 H}{P + p} = 2500 \text{ кгрмм.}$$

Совокупная работа вѣса бабы и сваи

$$T = (P + p)\, h = 1200 \,.\, 0{,}02 = 24 \text{ кгрмм.}$$

Сумма этихъ работъ должна равняться работѣ сопротивленія грунта $= kh$, т.-е.

$$2500 + 24 = 0{,}02\ k, \text{ откуда } k = 126200 \text{ килограм.}$$

Обративъ вниманіе на громадную величину сопротивленія грунта и на незначительную работу вѣса бабы и сваи, ясно видимъ значеніе удара для подобныхъ работъ, которыя почти невозможно было бы произвести простымъ давленіемъ. Замѣтимъ, что, опредѣливъ сопротивленіе k грунта вбиваніемъ пробной сваи, мы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлимъ и безопасную нагрузку на сваю, которая для прочности принимается не болѣе $\frac{1}{8}\,k$.

Безполезная (или вредная) работа деформаціи

$$T_1 = T - T_2 = 500 \text{ кгрмм.}$$

т.-е. составляетъ около 16% полной работы бабы.

§ 246. **Ударъ упругихъ тѣлъ.** Для разсмотрѣнія явленій движенія, происходящихъ при ударѣ упругихъ тѣлъ, раздѣлимъ время удара на два періода. Первый изъ нихъ, называемый *періодомъ сжатія*, начинается съ момента перваго соприкосновенія тѣлъ и кончается моментомъ ихъ наибольшаго сжатія. Явленія движенія, происходящія въ теченіе этого періода, вполнѣ тождественны съ явленіями при ударѣ неупругихъ тѣлъ. Второй періодъ, *періодъ возстановленія*, начинаясь съ момента наибольшаго сжатія, кончается моментомъ полнаго возстановленія вида ударяющихся тѣлъ. Частицы обоихъ тѣлъ, стремясь вслѣдствіе упругости занять первоначальное положеніе, будутъ продолжать давить другъ на друга, вслѣдствіе чего скорость ударяющаго шара будетъ продолжать уменьшаться, а скорость ударяемаго тѣла будетъ продолжать увеличиваться. Такъ какъ силы, возстановляющія вполнѣ первоначальный видъ тѣлъ, должны быть равны силамъ, произведшимъ измѣненіе ихъ формы, то отсюда можемъ заключить, что потеря скорости одного тѣла и увеличеніе скорости другого въ періодъ возстановленія будутъ совершенно такія же, какъ и въ періодъ сжатія. Вообще, происходящія при ударѣ упругихъ тѣлъ, измѣненія скоростей вполнѣ одинаковы съ тѣми измѣненіями ихъ, которыя получились бы, если бы оба тѣла были соединены вполнѣ упругой пружиной, сжимающеюся въ первый періодъ и возстановляющею свою первоначальную форму въ теченіе второго періода.

Въ началѣ перваго періода скорость ударяющаго тѣла была V, въ концѣ его она обратилась въ u. Слѣдовательно, уменьшеніе скорости въ теченіе перваго періода $= V - u$. Согласно сказанному, точно такое же измѣненіе скорости произойдетъ и въ теченіи второго періода, а потому въ концѣ удара уменьшеніе скорости ударяющаго тѣла $= 2\,(V - u)$. Разсуждая точно такимъ же образомъ, найдемъ, что увеличеніе скорости ударяемаго тѣла за все время удара $= 2\,(u - v)$. Отсюда получимъ, что

скорость перваго тѣла послѣ удара $V' = V - 2V + 2u = 2u - V$;

„ второго „ „ „ $v' = v + 2u - 2v = 2u - v$

или, замѣняя u его величиной изъ (2):

$$V' = \frac{2\,(MV + mv)}{M + m} - V \text{ или } V' = \frac{2mv + V(M - m)}{M + m} \quad \ldots \text{(8)}.$$

$$v' = \frac{2\,(MV + mv)}{M + m} - v \text{ или } v' = \frac{2MV - v(M - m)}{M + m} \quad \ldots \text{(9)}.$$

Отсюда легко находимъ величины измѣненія скоростей:

$$V - V' = \frac{2m}{M+m}(V-v) \ldots (10);\quad v' - v = \frac{2M}{M+m}(V-v) \ldots (11).$$

Сравнивъ эти формулы съ формулами (3) и (4), заключаемъ, *что при ударѣ упругихъ тѣлъ измѣненія скоростей вдвое болѣе, чѣмъ при ударѣ неупругихъ тѣлъ.*

§ 247. Частные случаи удара упругихъ тѣлъ.

I. *Массы тѣлъ равны между собою* ($M = m$).

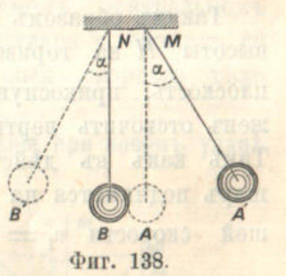
Въ этомъ случаѣ изъ равенствъ (8) и (9) получимъ

$$V' = v;\ v' = V,$$

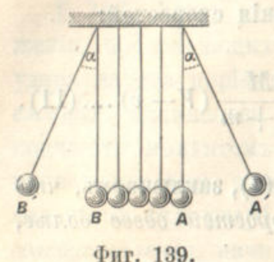
т.-е. *оба тѣла послѣ удара обмѣниваются своими скоростями.* Если до удара тѣла двигались другъ другу на встрѣчу, то, взявъ величину v съ отрицательнымъ знакомъ, найдемъ, что $V' = -v$; $v' = V$, т.-е. послѣ удара тѣла, обмѣнявшись своими скоростями, отскочатъ другъ отъ друга въ противоположныя стороны.

Если одно тѣло, напр., B, до удара было въ покоѣ ($v = O$), то послѣ удара $V = O$; $v' = V$, т.-е. ударившее тѣло остановится, а получившее ударъ, будетъ двигаться со скоростью ударившаго тѣла.

Вообразимъ два совершенно одинаковыхъ упругихъ шара A и B, повѣшенныхъ рядомъ на равныхъ нитяхъ (фиг. 138). Если одинъ изъ нихъ, напр. A, отведемъ отъ вертикали на уголъ α и затѣмъ пустимъ, то онъ, при паденіи, ударитъ шаръ B и остановится, а шаръ B поднимется, при чемъ опишетъ точно такую же дугу α. Затѣмъ шаръ B, опустившись, ударитъ шаръ A и остановится, а шаръ A опять поднимется на свою первоначальную высоту, падая съ которой, онъ снова ударитъ шаръ B и т. д. Такое движеніе должно было бы продолжаться въ теченіе какого угодно времени. Конечно, въ дѣйствительности этого не можетъ быть, такъ какъ, вслѣдствіе несовершенной упругости шаровъ, сопротивленія воздуха и тренія въ точкахъ привѣса, дуги, послѣдовательно описываемыя шарами A и B, будутъ все уменьшаться и наконецъ движеніе прекратится.



Фиг. 138.



Фиг. 139.

Положимъ, что имѣемъ группу одинаковыхъ упругихъ шаровъ, висящихъ рядомъ другъ съ другомъ (фиг. 139). Если отведемъ одинъ изъ крайнихъ шаровъ на нѣкоторый уголъ и пустимъ его, то онъ, ударивъ слѣдующій шаръ, остановится, а остальные шары будутъ послѣдовательно, незамѣтно для глаза, передавать ударъ другъ другу, такъ что послѣдній шаръ отскочитъ отъ ряда и опишетъ дугу α, которая, при полной упругости тѣлъ и отсутствіи сопротивленій, должна бы равняться дугѣ, описанной ударившимъ шаромъ. Затѣмъ это явленіе будетъ повторяться въ теченіе нѣкотораго времени.

II. *Массы тѣлъ не равны и одно изъ нихъ было въ покоѣ* $(M > m;\ V = O)$. При этихъ условіяхъ формулы (8) и (9) даютъ, что

$$V' = \frac{2mv}{M+m},\ v' = -v\,\frac{M-m}{M+m}.$$

Если допустимъ, что масса M несравненно болѣе массы m, то, принявъ $M = \infty$, получимъ: $V' = O;\ v' = -v$, т.-е. въ этомъ случаѣ, большое неподвижное тѣло, получившее ударъ, по прежнему останется въ покоѣ, а ударившее тѣло отскочитъ отъ него съ своей первоначальной скоростью въ противоположную сторону.

Такимъ образомъ вполнѣ упругій шаръ, свободно упавшій съ высоты H на горизонтальную неподвижную, вполнѣ упругую плоскость, прикоснувшись къ ней со скоростью $v = \sqrt{2gH}$ долженъ отскочить вертикально вверхъ на ту же самую высоту H. Такъ какъ въ дѣйствительности оба тѣла не вполнѣ упруги, то шаръ поднимется на меньшую высоту h, соотвѣтствующую меньшей скорости $v_1 = \sqrt{2gh}$. Отношеніе скоростей

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}} = e$$

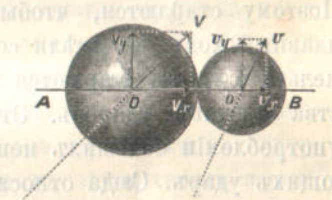
называется *коэффиціентомъ возстановленія* (§ 239). Какъ видно отсюда, этотъ коэффиціентъ можетъ быть опредѣленъ путемъ опыта. Введя величину его e въ формулы для удара упругихъ тѣлъ, получимъ формулы для удара тѣлъ не вполнѣ упругихъ.

§ 248. **Сохраненіе живой силы упругихъ тѣлъ.** Такъ какъ упругія тѣла послѣ удара вполнѣ возстановляютъ свой первоначальный видъ и всѣ частицы ихъ возвращаются въ то же положеніе, которое онѣ занимали до удара, то заключаемъ, что работа, затраченная на сжатіе, равна по величинѣ, но противоположна по направленію работѣ, употребленной на возстановленіе вида тѣлъ. Слѣдовательно, полная работа за все время удара упругихъ тѣлъ равна нулю, иными словами, *никакой потери живой силы упругихъ тѣлъ за время удара не происходитъ*, т.-е.

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MV'^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

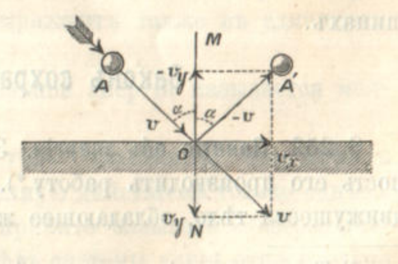
Равенство (10) можно провѣрить, подставивъ вмѣсто V' и v' ихъ значенія изъ (8) и (9).

§ 249. **Косой центральный ударъ.** Положимъ, что два тѣла A и B (фиг. 136), скорости которыхъ по величинѣ и направленію суть OV и ov, ударяются другъ о друга. Разложивъ скорости тѣлъ на составляющія V_x, V_y, v_x, v_y, направленныя по линіи удара и по перпендикуляру къ ней, замѣтимъ, что слагающія V_y и v_y не получатъ никакого измѣненія при ударѣ, а слагающія V_x и v_x измѣнятся точно такъ же, какъ и при прямомъ центральномъ ударѣ. Опредѣливъ ихъ величины послѣ удара и сложивъ со скоростями V_y и v_y, получимъ окончательныя скорости тѣлъ послѣ удара.



Фиг. 136.

§ 250. **Равенство угловъ паденія и отраженія при косомъ ударѣ упругихъ тѣлъ.** Если вполнѣ упругое тѣло ударяется объ упругую неподвижную плоскость подъ нѣкоторымъ угломъ (фиг. 140), то оно отскакиваетъ отъ нея или, какъ говорятъ, *отражается* ею подъ такимъ же угломъ, но построеннымъ по другую сторону перпендикуляра MO, возставленнаго къ плоскости изъ точки



Фиг. 140.

соприкосновенія, такъ что $\angle AOM = \angle MOA'$. Первый изъ этихъ угловъ называется *угломъ паденія*, а второй — *угломъ отраженія*.

Для доказательства разложимъ скорость v тѣла A на составляющія v_x и v_y, направленныя по плоскости и по перпендикуляру къ ней. Скорость v_x не измѣнится при ударѣ, скорость же v_y, по свойству удара упругаго тѣла о массивную упругую плоскость, обратится въ равную и прямо противоположную скорость $-v_y$. Сложивъ скорости $-v_y$ и v_x, получимъ окончательную скорость $-v$. Изъ чертежа прямо видно, что по величинѣ $v = -v$ и что $\angle AOM = \angle MOA'$, т.-е. *что уголъ паденія равенъ углу отраженія*.

§ 251. **Польза и вредъ ударовъ.** Дѣйствія ударовъ представляютъ съ одной стороны незамѣнимое средство при производствѣ различныхъ техническихъ работъ, но съ другой стороны приносятъ и большой вредъ, выражающійся, не говоря уже о безполезной тратѣ живой силы, въ разстройствѣ связи между частями машинъ, въ уменьшеніи ихъ прочности и наконецъ въ разрушеніи ихъ. Поэтому стараются, чтобы машины имѣли болѣе или менѣе плавный ходъ, не имѣли сотрясеній и ударовъ. Тамъ, гдѣ этого нельзя сдѣлать, стараются употреблять предохранительныя средства противъ ударовъ. Эти средства состоятъ, во-первыхъ, въ употребленіи большихъ неподвижныхъ массъ, какъ бы поглощающихъ ударъ. Сюда относятся массивныя наковальни, станины и фундаменты машинъ, мостовые устои и быки и т. п. Во-вторыхъ, для смягченія или даже уничтоженія ударовъ пользуются упругими тѣлами: рессорами, резиновыми шинами, пружинными, каучуковыми и воздушными буферами. Рессоры экипажей не только смягчаютъ удары, но и позволяютъ, благодаря уменьшенію ударовъ, дѣлать части экипажей менѣе массивными и, слѣдовательно, болѣе легкими. То же самое можно сказать о резиновыхъ шинахъ.

Законъ сохраненія энергіи.

§ 252. **Понятіе объ энергіи.** Энергіей тѣла называется способность его производить работу *). Само собою понятно, что всякое движущееся тѣло, обладающее живой силой, способно производить

*) Терминъ *энергія*, введенный въ науку въ 1807 г. *Томасомъ Юнгомъ*, произведенъ имъ отъ греческаго слова *ергонъ*—дѣло, работа.

работу и, слѣдовательно, обладаетъ энергіею, которую принято называть *энергіей движенія* или *кинетической энергіей*. Свободно или несвободно падающій камень, мчащійся по рельсамъ паровозъ, летящая стрѣла или пуля, упругая пружина, возстановляющая свою первоначальную форму, всѣ эти тѣла обладаютъ кинетической энергіей.

Съ другой стороны, легко видѣть, что и покоящіяся тѣла могутъ находиться въ такихъ условіяхъ, при которыхъ они въ любой моментъ способны начать производить опредѣленную работу; иначе говоря, покоящіяся тѣла при извѣстныхъ условіяхъ могутъ обладаетъ нѣкоторымъ опредѣленнымъ *запасомъ работы*. Такъ напримѣръ, мы уже знаемъ (§ 183), что всякое тяжелое тѣло, покоящееся на возвышеніи h отъ поверхности земли, имѣетъ опредѣленный запасъ работы Ph (гдѣ P—вѣсъ тѣла), которую оно можетъ произвести при паденіи. Такое покоящееся тѣло также, очевидно, обладаетъ энергіей, которую называютъ *энергіей положенія* или *потенціальной энергіей*. Стрѣла на натянутомъ лукѣ, сжатая пружина, паровозъ съ запасомъ пара въ котлѣ, запруженная вода, всѣ эти тѣла обладаютъ потенціальной энергіей, такъ какъ они могутъ произвести опредѣленную работу, какъ только будетъ устранено извѣстное препятствіе или перестанетъ дѣйствовать извѣстная задерживающая сила. Тяжелое тѣло, лежащее на поверхности земли, не имѣетъ энергіи. Если его поднять на нѣкоторую высоту, (для чего придется произвести извѣстную работу), то оно пріобрѣтетъ потенціальную энергію, равную произведенію его вѣса на высоту поднятія, т.-е. вполнѣ равную ранѣе произведенной работѣ.

Величину потенціальной энергіи тѣла измѣряютъ работой, которую оно можетъ произвести; *величину кинетической энергіи измѣряютъ живой силой*, которую имѣетъ тѣло въ разсматриваемый моментъ его движенія, и выражаютъ также въ единицахъ работы.

Сумма кинетической и потенціальной энергіи называется *полной энергіей тѣла*.

§ 253. **Консервативная система тѣлъ.** Положимъ, что имѣемъ группу или систему тѣлъ, подверженную дѣйствіемъ только однѣхъ внутреннихъ силъ. Такую систему принято называть *консервативной*. При измѣненіи расположенія тѣлъ системы другъ относительно друга получаетъ измѣненія и вся система: она, какъ говорятъ,

переходитъ изъ одного положенія или состоянія въ другое, при чемъ, очевидно, такой переходъ производится на счетъ работы внутреннихъ силъ*).

Легко показать, что при переходѣ консервативной системы изъ нѣкотораго начальнаго положенія *(A)* въ нѣкоторое конечное положеніе *(C)*, *величина работы внутреннихъ силъ опредѣляется исключительно ея крайними положеніями*, т.-е. нисколько не зависитъ отъ какого-нибудь промежуточнаго ея положенія *(B)*.

Пусть будутъ: $\Sigma\frac{mv_o^2}{2}$, $\Sigma\frac{mv_k^2}{2}$ и $\Sigma\frac{mv^2}{2}$ — суммы живыхъ силъ тѣлъ системы въ ея начальномъ, конечномъ и промежуточномъ состояніи; T_1 и T_2—работы, производимыя внутренними силами, при переходѣ изъ начальнаго положенія *(A)* системы въ промежуточное *(B)* и изъ промежуточнаго положенія *(B)* въ конечное *(C)*; наконецъ T—полная работа при переходѣ изъ начальнаго положенія въ конечное.

По теоремѣ живыхъ силъ для системы тѣлъ имѣемъ:

$$T_1 = \Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_o^2}{2} \quad . \; . \; (1); \quad T_2 = \Sigma\frac{mv_k^2}{2} - \Sigma\frac{mv^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Сложивъ почленно эти равенства и замѣтивъ, что $T_1 + T_2 = T$, получимъ:

$$T = \Sigma\frac{mv_k^2}{2} - \Sigma\frac{mv_o^2}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

т.-е. величина полной работы силъ не зависитъ отъ промежуточнаго положенія *(B)* системы.

§ 254. **Законъ сохраненія энергіи.** Выведеннымъ равенствамъ можно придать слѣдующій весьма замѣчательный видъ. Вычитая почленно изъ равенства (3) равенство (2), получимъ:

$$T - T_2 = \Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_o^2}{2}$$

или, перенеся члены:

$$T + \Sigma\frac{mv_o^2}{2} = T_2 + \Sigma\frac{mv^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

*) Опредѣленное расположеніе тѣлъ системы называется *конфигураціей* системы. Переходъ ея изъ одного положенія въ другое представляетъ измѣненіе конфигураціи.

Но величина T, т.-е. работа, которую произведутъ внутреннія силы при переходѣ системы изъ начальнаго *(A)* въ конечное положеніе *(C)*, очевидно, есть ничто иное какъ величина потенціальной энергіи системы въ ея начальномъ положеніи *(A)*; точно также T_2 есть величина потенціальной энергіи системы въ ея промежуточномъ положеніи *(B)*. Выраженія же $\Sigma \frac{mv_o^2}{2}$ и $\Sigma \frac{mv^2}{2}$ представляютъ величины кинетической энергіи системы въ ея начальномъ *(A)* и промежуточномъ положеніи *(B)*. Обозначая для краткости величины потенціальной энергіи системы въ ея соотвѣтственныхъ положеніяхъ черезъ P_a и P_b, а величины кинетической энергіи ея черезъ K_a и K_b, равенство (4) представимъ въ такомъ видѣ:

$$P_a + K_a = P_b + K_b = \text{постоянной величинѣ} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Такъ какъ промежуточное состояніе (*B*) системы совершенно *произвольное*, то изъ равенства (5) заключаемъ, что *во всякомъ положеніи консервативной системы сумма ея потенціальной и кинетической энергіи есть величина постоянная*, или иначе: *полная энергія консервативной системы всегда остается постоянной.*

Слѣдовательно, насколько, напр., уменьшается величина потенціальной энергіи системы, настолько же увеличивается величина ея кинетической энергіи, такъ что общая сумма ихъ не измѣняется.

Вселенную можно разсматривать какъ систему тѣлъ, на которую дѣйствуютъ лишь однѣ внутреннія силы. Это позволяетъ сдѣлать слѣдующее замѣчательнѣйшее заключеніе: *полная энергія вселенной есть величина постоянная.* Этотъ, въ высшей степени важный по своей общности и многочисленности приложеній, законъ природы называется **закономъ сохраненія энергіи.**

По своему всеобъемлющему значенію законъ сохраненія энергіи можетъ быть поставленъ рядомъ съ другимъ великимъ закономъ природы, открытымъ въ концѣ 18-го вѣка знаменитымъ французскимъ химикомъ *Лавуазье* и называемымъ **закономъ сохраненія вещества или матеріи**. Эти два закона утверждаютъ, что въ мірѣ не исчезаетъ и не возникаетъ вновь никакая малѣйшая частица вещества, а также не исчезаетъ и не возникаетъ вновь

никакая доля энергіи. Тѣла могутъ измѣнять свой физическій видъ и химическій составъ, энергія ихъ можетъ переходить изъ одной формы въ другую, но общая сумма какъ вещества, такъ и энергіи въ мірѣ остается постоянной.



Фиг. 1.

§ 255. Разсмотримъ въ видѣ примѣра паденіе тяжелаго тѣла на землю съ нѣкоторой высоты h. Паденіе тѣла происходитъ исключительно вслѣдствіе силы притяженія земли, поэтому земля и падающее тѣло представляютъ простѣйшую консервативную систему, въ которой сила притяженія есть внутренняя сила. Въ начальной или верхней точкѣ B (фиг. 1) потенціальная энергія тѣла $= ph = mgh$ (гдѣ p и m—вѣсъ и масса тѣла), кинетическая энергія его $= O$. Когда падающее тѣло пришло въ точку C, отстоящую отъ поверхности земли на высоту h_1, потенціальная энергія его уменьшилась и стала $= ph_1 = mgh_1$, но за то появилась кинетическая энергія, которая въ этой точкѣ достигла величины $\frac{mv_1^2}{2} = mgh - mgh_1$, такъ какъ въ этотъ моментъ скорость падающаго тѣла $v_1 = \sqrt{2g(h - h_1)}$. Поэтому сумма обѣихъ энергій въ точкѣ C равна $mgh_1 + mgh - mgh_1 = mgh$. Наконецъ, когда тѣло коснется земли въ точкѣ A, потенціальная энергія его обратится въ нуль, а кинетическая будетъ $= \frac{mv^2}{2} = mgh$, такъ какъ скорость въ конечный моментъ $v = \sqrt{2gh}$. Итакъ, во всѣхъ трехъ различныхъ положеніяхъ полная энергія системы была постоянной и равной $mgh = ph$.

Точно также не трудно доказать, что сумма обоихъ видовъ энергіи остается постоянной при паденіи по какой угодно наклонной траекторіи или при движеніи тѣла, брошеннаго вверхъ и т. п.

§ 256. Сравнительно позднее открытіе и общее признаніе закона сохраненія энергіи объясняется существованіемъ многихъ явленій, какъ бы не согласующихся съ этимъ закономъ.

Обратимся снова къ примѣру падающаго тѣла и разсмотримъ, что происходитъ послѣ того, какъ оно коснулось земли. Тѣло

ударится о землю и нѣсколько вдавится въ нее, т.-е. произведетъ нѣкоторую работу. При этомъ вся его кинетическая энергія (живая сила) израсходуется, но вмѣстѣ съ тѣмъ не пріобрѣтается никакой потенціальной энергіи. Повидимому мы здѣсь встрѣчаемся съ исчезновеніемъ энергіи, что является противорѣчіемъ закону ея сохраненія.

Не трудно замѣтить, что примѣры подобнаго, какъ бы безслѣднаго исчезновенія энергіи происходятъ почти постоянно. Покатимъ, напр., какое-нибудь тѣло съ извѣстной начальной скоростью по горизонтальной плоскости. Черезъ нѣкоторое время тѣло потеряетъ всю свою кинетическую энергію и остановится, при чемъ не пріобрѣтетъ никакой потенціальной энергіи. Точно такое же явленіе произойдетъ съ тѣломъ, приведеннымъ во вращательное движеніе и затѣмъ предоставленнымъ самому себѣ. Послѣ нѣсколькихъ оборотовъ это тѣло остановится и энергія его уничтожится. Отведемъ маятникъ изъ вертикальнаго положенія въ нѣкоторое наклонное, чѣмъ сообщимъ ему извѣстную потенціальную энергію и затѣмъ предоставимъ ему свободно качаться. Потенціальная энергія маятника въ первую половину размаха будетъ постепенно превращаться въ кинетическую и окончательно перейдетъ въ нее въ самой нижней точкѣ амплитуды. Во вторую половину размаха пріобрѣтенная кинетическая энергія (живая сила) будетъ переходить въ потенціальную и окончательно перейдетъ къ нее въ концѣ размаха. Затѣмъ въ теченіе нѣкотораго времени эти переходы будутъ повторяться, но вмѣстѣ съ тѣмъ дуги, описываемыя маятникомъ, будутъ все уменьшаться, а слѣдовательно постоянно будутъ уменьшаться и живая сила (кинет. энергія) и запасъ работы (потенц. энергія). Наконецъ вся энергія маятника исчезнетъ и онъ остановится.

Вполнѣ понятно, что во всѣхъ этихъ явленіяхъ причинами прекращенія движенія являются такъ называемыя вредныя сопротивленія: треніе, ударъ, сопротивленіе среды. Устраняя по возможности эти сопротивленія, можно продлить движеніе на довольно значительное время. Такъ напр., въ Парижской обсерваторіи физикъ Борда дѣлалъ опытъ надъ качаніемъ маятника въ пространствѣ, изъ котораго былъ выкачанъ насколько возможно воздухъ, при чемъ особыми приспособленіями было крайне уменьшено треніе въ точкѣ привѣса. При такихъ условіяхъ маятникъ,

предоставленный самому себѣ, качался болѣе 30 часовъ! Но за тѣмъ, конечно, онъ остановился вслѣдствіе тренія и сопротивленія воздуха, происходившаго при разсѣканіи маятникомъ его частицъ, т.-е. слѣдовательно также отъ ударовъ и тренія.

Итакъ, энергія, какъ видимъ, исчезаетъ отъ дѣйствія вредныхъ сопротивленій, что является какъ бы очевиднымъ противорѣчіемъ закону ея сохраненія.

§ 257. Явленія, наблюдаемыя при ударѣ и треніи представляютъ также еще то затрудненіе, что они какъ бы противорѣчатъ также и закону сохраненія вещества.

Въ 18-мъ столѣтіи большинство физиковъ считали теплоту невидимымъ и невѣсомымъ веществомъ, находящимся въ большемъ или меньшемъ количествѣ во всѣхъ тѣлахъ, при чемъ полагали, что теплота, подобно жидкости, можетъ при извѣстныхъ условіяхъ притекать въ тѣла, распространяться по нимъ и наконецъ вытекать изъ нихъ. Расширеніе тѣлъ при нагрѣваніи и сжатіе при охлажденіи объясняли тѣмъ, что въ первомъ случаѣ въ нихъ втекаетъ теплота, а во второмъ—вытекаетъ. Этой теоріей вещественности теплоты объясняются сохранившіяся до сихъ поръ физическіе термины: теплопроводность, теплоемкость или удѣльная теплота, скрытая теплота, наконецъ названіе теплоты теплородомъ.

Между тѣмъ еще съ глубочайшей древности было извѣстно, что при треніи и ударахъ появляется теплота. Слѣдовательно, если теплота есть вещество, то въ такомъ случаѣ мы можемъ создавать вещество и при томъ, какъ показали опыты, создавать его въ неограниченномъ количествѣ.

Первый, кто подорвалъ ученіе о матеріальности теплоты, былъ американецъ В. Томсонъ, графъ Румфордъ. Задавшись цѣлью показать опытомъ, что посредствомъ тренія можно получить какое угодно количество теплоты, онъ устроилъ приборъ, представлявшій металлическій цилиндръ съ туго входившимъ въ него тупымъ сверломъ. Цилиндръ былъ помѣщенъ въ деревянный ящикъ, въ который было налито около 8 килограм. (20 фунтовъ) воды при 15° С., и затѣмъ силою лошадей былъ приведенъ во вращеніе со скоростью 32 оборотовъ въ минуту. При треніи сверла о дно и стѣнки цилиндра получилось такое количество теплоты, что черезъ $2^1/_2$ часа вращенія вода, бывшая въ ящикѣ, закипѣла. Въ своемъ сообщеніи, сдѣланномъ въ 1789 г. объ этомъ опытѣ, Рум-

фордъ заявилъ, что теплота, образующаяся треніемъ въ неограниченномъ количествѣ, не можетъ быть веществомъ, а представляетъ особый родъ движенія. Черезъ годъ послѣ этого англійскій ученый Гумфри Деви высказалъ то же самое заключеніе, подтвердивъ его новымъ замѣчательнымъ опытомъ: онъ теръ одинъ о другой два куска льда при температурѣ —1,6° С. При этомъ ледъ на трущихся поверхностяхъ растаялъ и обратился въ воду, температура которой была +1,6° С. Такъ какъ при этомъ опытѣ была исключена всякая возможность притока теплоты изъ окружающей среды, ибо температура ея была ниже температуры образовавшейся воды, а также и возможность полученія ея изъ самаго тѣла, ибо теплоемкость льда вдвое менѣе теплоемкости воды, то оставалось допустить, что можно изъ ничего создавать вещество, называемое теплотой. Но такое заключеніе не могло быть принято, такъ какъ оно явно противорѣчило закону сохраненія вещества. Такимъ образомъ была ниспровергнута матеріалистическая теорія теплоты, и постепенно стало распространяться убѣжденіе, что теплота есть не вещество, а состояніе тѣла, происходящее отъ невидимаго движенія его частицъ.

§ 258. Въ такомъ положеніи въ началѣ 40-хъ годовъ XIX-го вѣка находился вопросъ о безслѣдномъ исчезновеніи при треніи и ударахъ кинетической энергіи или живой силы тѣлъ и о появленіи при этомъ неизвѣстно откуда теплоты. Многіе ученые указывали на необходимо существующую связь между этими явленіями, однако, честь дѣйствительнаго открытія (въ 1842—1843 гг.), объясненія и доказательства тождественности исчезнувшей живой силы тѣла и образовавшейся при этомъ теплоты, ученія о неуничтожаемости энергіи *), о переходѣ ея изъ одного вида въ другой принадлежитъ двумъ почти неизвѣстнымъ дотолѣ труженикамъ науки: германскому врачу *Юлію Роберту Майеру* (1814—1878) и англійскому физику *Джемсу Прескотту Джаулю* (1818—1889). Математическое выраженіе закона сохраненія энергіи далъ впервые знаменитый германскій физикъ *Германъ Гельмгольцъ* (1821—1894), а окончательное введеніе въ науку понятія объ энергіи и раздѣленіи ея на кинетическую и потенціальную принадлежитъ шотландскому инженеру *Ренкину* (1850—1872).

*) Энергію въ то время называли силой.

Трудами этихъ, а также и другихъ ученыхъ *(Р. Клаузіуса, В. Томсона, Г. Цейнера)* была создана механическая теорія теплоты *) или *термодинамика.* По этой теоріи, энергія тѣла при треніи и ударахъ не исчезаетъ, но прекратившееся движеніе цѣлаго тѣла переходитъ въ невидимое движеніе его частицъ. Частицы тѣлъ находятся въ постоянномъ движеніи, которое мы ощущаемъ какъ теплоту. При переходѣ видимой живой силы всего тѣла въ невидимую живую силу его частицъ, эта послѣдняя увеличивается, т.-е. тѣло *нагрѣвается.* Итакъ, живая сила тѣла или, что все равно, произведенная тѣломъ работа переходитъ въ теплоту. Многочисленные примѣры указываютъ, что и обратно теплота можетъ переходить въ работу: напр., работа паровой машины производится на счетъ теплоты горѣнія топлива. Наконецъ извѣстно, что теплота и механическая работа могутъ вызывать также и другія явленія: свѣтъ, звукъ, разложеніе химическихъ соединеній, электричество. Отсюда слѣдуетъ заключить, что всѣ эти явленія суть ничто иное, какъ видоизмѣненія одной и той же энергіи, которая можетъ преобразовываться въ тотъ или другой видъ, совершенно подобно тому, какъ вещество можетъ измѣнять свой видъ и составъ, оставаясь все въ томъ же самомъ количествѣ.

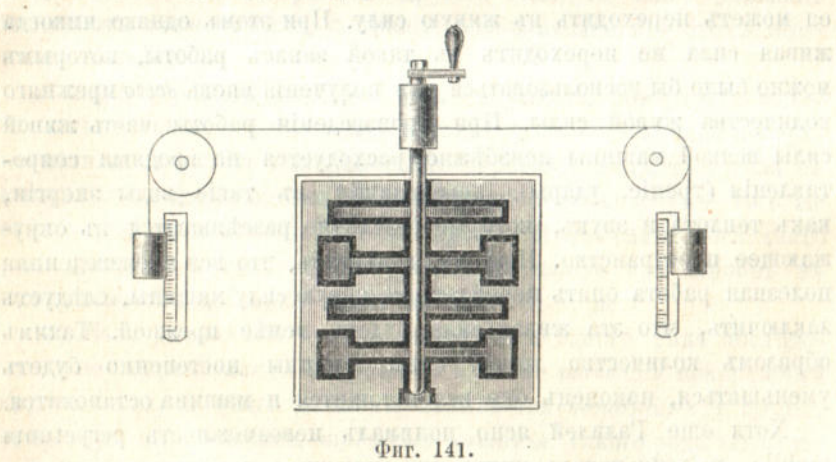
Если произведенная работа вполнѣ переходитъ въ теплоту, то между количествами той и другой должна существовать точная числовая зависимость. Такъ какъ работа измѣряется килограммо-метрами, а теплота—калоріями, то числовая зависимость между ихъ количествами будетъ имѣть видъ пропорціональности или, какъ говорятъ, *эквивалентности* **). Число, показывающее сколько единицъ работы могутъ произвести одну единицу теплоты, называется *механическимъ эквивалентомъ теплоты.* Первый нашелъ чисто теоретическимъ путемъ величину механическаго эквивалента теплоты Майеръ въ 1842 г. Но одновременно съ нимъ Джауль, напавшій совершенно самостоятельно на ту же самую идею, нашелъ эту величину посредствомъ цѣлаго ряда многочисленныхъ и остроумныхъ опытовъ.

---

*) Интересно замѣтить, что нашъ знаменитый *Ломоносовъ* еще за 100 лѣтъ передъ основаніемъ этой теоріи утверждалъ, что теплота есть родъ движенія.

**) *Эквивалентный* (латинск.)—равносильный, равностоющій.

§ 259. **Опытъ Джауля.** Наиболѣе точные опыты Джауль производилъ съ помощью прибора, состоявшаго изъ мѣднаго сосуда съ вращающеюся осью, имѣвшей 8 паръ лопатокъ (фиг. 141). Внутри сосуда находились четыре поперечныя стѣнки съ прорѣзами, въ которые при вращеніи оси проходили съ небольшимъ зазоромъ лопатки. На наружный конецъ оси былъ надѣтъ деревянный барабанъ, на который была намотана нить такимъ образомъ, что если тянули оба конца ея въ разныя стороны, то барабанъ и ось вращались. Нити были перекинуты черезъ блоки и на концахъ ихъ висѣли равные грузы. Въ сосудъ наливалось 6—7 килограммовъ воды и вставлялся термометръ. Вращая ручку барабана, навивали на него нити и поднимали грузы на одинаковую высоту, измѣряемую поставленными возлѣ нихъ рейками. Затѣмъ, замѣтивъ показаніе термометра, опускали ручку. Грузы падали, увлекая нити, которыя такимъ образомъ вращали барабанъ и ось съ лопатками. Перемѣшиваемыя частицы воды претерпѣвали треніе другъ о друга, въ результатѣ чего температура воды повышалась, что и замѣчали по термометру тотчасъ послѣ паденія грузовъ. Зная количество воды въ сосудѣ и разность температуръ до и послѣ паденія грузовъ, можно было легко опредѣлить число единицъ полученной теплоты. Количество произве-



Фиг. 141.

денной работы, очевидно, равно произведенію изъ суммы грузовъ на величину паденія. Изъ этой работы вычитались различныя потери, которыя пошли на вредныя сопротивленія: треніе нитей

о барабанъ и блоки, треніе оси, потерю при ударѣ грузовъ о полъ. Остатокъ работы употреблялся исключительно на образованіе теплоты. Изъ нѣсколькихъ десятковъ опытовъ Джауль нашелъ, что для полученія одной калоріи необходимо израсходовать 425 килограммо-метровъ работы. Это число, обозначаемое буквой J въ честь Джауля (Joule), и представляетъ такъ называемый механическій эквивалентъ теплоты. Если принять русскія мѣры работы и теплоты (по Реомюру), то оказывается, что для образованія одной русской единицы теплоты надо израсходовать около 43 пудофутовъ работы.

§ 260. **Perpetuum mobile.** Изъ закона сохраненія энергіи вытекаетъ, какъ прямое его слѣдствіе, невозможность устройства машины съ вѣчнымъ движеніемъ. Въ прежнее время многіе механики долго трудились надъ задачей построить такой механизмъ, который, будучи однажды пущенъ въ ходъ, продолжалъ бы работать вѣчно, не останавливаясь и не требуя никакой внѣшней затраты силъ. Такой воображаемый механизмъ называли perpetuum mobile [1]).

Легко видѣть, что устроить perpetuum mobile невозможно. Никакая машина не можетъ творить энергію или работу: она можетъ только преобразовывать свою живую силу въ потенціальную энергію или въ запасъ работы и, обратно, потенціальная энергія ея можетъ переходить въ живую силу. При этомъ однако никогда живая сила не переходитъ въ такой запасъ работы, которымъ можно было бы воспользоваться для полученія вновь *всего* прежняго количества живой силы. При произведеніи работы часть живой силы всякой машины неизбѣжно расходуется на вредныя сопротивленія (треніе, удары), переходящія въ такіе виды энергіи, какъ теплота и звукъ, которые безслѣдно разсѣиваются въ окружающее пространство. Поэтому, допустивъ, что вся произведенная полезная работа опять перейдетъ въ живую силу машины, слѣдуетъ заключить, что эта живая сила будетъ менѣе прежней. Такимъ образомъ количество живой силы машины постепенно будетъ уменьшаться, наконецъ она вся истощится и машина остановится.

Хотя еще Галилей ясно понималъ невозможность perpetuum mobile, и хотя теперь никто изъ знающихъ научныя основы механики не будетъ заниматься этой задачей, тѣмъ не менѣе и до

[1]) Вѣчно движущееся тѣло.

сихъ поръ находятся механики изъ самоучекъ, которые безплодно теряютъ надъ ней свое время, трудъ и средства. Часто случается, что они, ошибочно вообразивъ, что разрѣшили ее, вводятъ въ заблужденіе и расходы еще менѣе знающихъ людей, маня ихъ надеждой на большіе доходы отъ устройства такой машины. Обязанность каждаго механика — разсѣивать подобныя вредныя заблужденія.

Вредныя сопротивленія.

I. Треніе.

§ 261. Какъ извѣстно изъ предыдущаго (§ 207), при перемѣщеніи одного тѣла по поверхности другого, возникаетъ особая сила сопротивленія движенію, называемая *треніемъ*. Различаютъ два особыхъ рода тренія, въ зависимости отъ того, какимъ образомъ одно тѣло перемѣщалось по другому.

1) Если *одна и та же часть* поверхности одного тѣла во время движенія приходитъ въ послѣдовательное соприкосновеніе *съ различными* частями поверхности другого тѣла, то такое движеніе называютъ *скольженіемъ*, а треніе, возникающее при этомъ, *треніемъ скольженія*.

Такимъ образомъ движутся тѣла съ плоской поверхностью соприкосновенія по плоскостямъ, а также тѣла съ кривыми поверхностями по кривымъ поверхностямъ обратнаго вида, т.-е. тѣла съ выпуклыми поверхностями по вогнутымъ поверхностямъ того же самаго радіуса кривизны или наоборотъ. Примѣрами послѣдняго рода движеній могутъ служить: вращеніе цапфъ или шиповъ въ подшипникахъ, движеніе гайки по винту и т. п.

2) Если *различныя точки* поверхности одного тѣла послѣдовательно соприкасаются съ *различными же точками* поверхности другого тѣла, то такое движеніе называется *катаніемъ*, а треніе, при этомъ возникающее, *треніемъ катанія*. Такого рода движенія имѣютъ колеса, цилиндры и другія круглыя тѣла по плоскостямъ или по выпуклымъ кривымъ поверхностямъ. Длина пути (т.-е. дуги), описываемаго при такомъ движеніи точкой окружности катящагося тѣла, очевидно, совершенно *равна* длинѣ пути, пройденнаго этимъ тѣломъ по плоскости или по поверхности.

3) Наконецъ существуютъ и такія движенія, при которыхъ поверхность одного тѣла отчасти скользитъ, а отчасти катится по поверхности другого тѣла, что можно наблюдать, напр., въ движеніяхъ невполнѣ свободно вращающихся колесъ. Такого рода движенія называются *катаніемъ со скольженіемъ.* Длина пути, описываемаго при этомъ точкой окружности движущагося тѣла, очевидно, *менѣе* длины пути, пройденнаго самимъ тѣломъ. Само собой понятно, что возникающее здѣсь треніе состоитъ отчасти изъ тренія скольженія, а отчасти изъ тренія катанія.

§ 262. **Треніе скольженія**. Хорошо извѣстно, что, при скольженіи одного тѣла по другому, величина тренія бываетъ тѣмъ больше, чѣмъ шероховатѣе поверхности трущихся тѣлъ. Основываясь на этомъ, первоначально думали, что треніе происходитъ исключительно оттого, что выступы одного тѣла входятъ во впадины другого, что такимъ образомъ при движеніи происходитъ сгибаніе и обламываніе этихъ выступовъ и что на эту именно работу и затрачивается нѣкоторая часть движущей силы. Впослѣдствіи, однако, замѣтили, что при скольженіи хорошо пригнанныхъ другъ къ другу и отполированныхъ поверхностей почти не происходитъ *истиранія*, т.-е. обламыванія неровностей и тѣмъ не менѣе существуетъ треніе, болѣе или менѣе значительное, въ зависимости отъ давленія одной поверхности на другую. Отсюда заключили, что истираніе неровностей во всякомъ случаѣ не можетъ считаться единственной причиной тренія и, обративъ вниманіе, что при треніи всегда исчезаетъ нѣкоторая часть живой силы тѣла и появляется теплота, пришли къ слѣдующему, общепринятому въ настоящее время, взгляду: при движеніи одного тѣла по другому, частицы соприкасающихся поверхностей обоихъ тѣлъ болѣе или менѣе часто и сильно ударяются другъ о друга, вслѣдствіе чего *видимая* живая сила движущагося тѣла уменьшается, переходя въ *невидимую* живую силу частицъ обоихъ тѣлъ, что и ощущается нашими чувствами въ видѣ ихъ нагрѣванія.

§ 263. **Опыты надъ треніемъ при скольженіи** твердыхъ тѣлъ были производимы многими учеными. Наиболѣе плодотворны были опыты *Амонтона* (1699 г.), открывшаго, что величина тренія не зависитъ отъ величины поверхности движущагося тѣла, и въ особенности опыты *Кулона* (1781) и *Морена* (1831—1834 гг.), установившихъ такъ называемые *законы тренія твердыхъ тѣлъ.*

Опыты этихъ послѣднихъ изслѣдователей производились слѣдующимъ образомъ. На дубовыхъ брусьяхъ укладывали гладкіе рельсы изъ испытуемаго матеріала, по которымъ двигались сани съ гладкими полозьями изъ того же или изъ другого испытуемаго матеріала. Къ санямъ привязывалась веревка, которая шла параллельно длинѣ брусьевъ, переходила черезъ блокъ, укрѣпленный на концѣ ихъ и затѣмъ спускалась вертикально внизъ, неся на своемъ концѣ чашку съ грузомъ. Грузъ, падая, увлекалъ за собой веревку и двигалъ сани. Если движеніе саней было равномѣрное, то, очевидно, что движущая сила, равная натяженію веревки *), равнялась силѣ тренія.

Опыты надъ треніемъ однихъ и тѣхъ же тѣлъ производились по нѣсколько разъ, при чемъ какъ на сани, такъ и на чашку вѣсовъ накладывались различные грузы.

§ 264. **Законы тренія скольженія.** Назовемъ черезъ P, P_1, P_2, . . . вѣса нагруженныхъ саней или давленія ихъ на рельсы во время 1-го, 2-го, 3-го, ... опытовъ, и черезъ F, F_1, F_2, ... силы, приводящія сани во время этихъ опытовъ въ равномѣрное движеніе или, что все равно, силы тренія, соотвѣтствующія даннымъ нагрузкамъ. Опыты показали, что

$$\frac{F}{P}=\frac{F_1}{P_1}=\frac{F_2}{P_2}=\ldots\ldots=f\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

т.-е. что отношеніе силы тренія къ соотвѣтствующему нормальному давленію одного тѣла на другое есть *величина постоянная* **). Эту величину называютъ *коэффиціентомъ тренія* и обозначаютъ буквою f.

Изъ пропорціи (a) получаемъ:

$$F=fN\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$ т.-е.

1) *сила тренія прямо-пропорціональна нормальному давленію одного тѣла на другое*, что представляетъ первый законъ

*) Вѣсъ чашки съ грузомъ всегда былъ немного болѣе силы натяженія веревки, такъ какъ часть этого вѣса затрачивалась на треніе веревки о блокъ и блока около своей оси, поэтому Моренъ натяженіе веревки измѣрялъ динамометромъ, укрѣпленнымъ между санями и блокомъ.

**) Совершенно понятно, какъ это мы и видѣли при изученіи движенія тѣлъ по наклонной плоскости, что нормальное давленіе никакъ нельзя отождествлять съ вѣсомъ тѣла. Въ данномъ случаѣ эти величины одинаковы только потому, что тѣла двигались по горизонтальной плоскости.

тренія, установленный Кулономъ и Мореномъ. Эти же ученые нашли, что

2) *треніе при началѣ движенія болѣе, чѣмъ во время движенія*;

3) *треніе не зависитъ отъ величины поверхности движущагося тѣла* *);

4) *треніе не зависитъ отъ скорости движенія*;

5) *треніе зависитъ отъ физическихъ свойствъ трущихся тѣлъ и степени гладкости ихъ поверхности*. Такимъ образомъ треніе между *различными* пилами, хотя бы они имѣли одинаковую гладкость и испытывали одинаковое нормальное давленіе, будетъ *различное*. Шероховатыя поверхности испытываютъ бо́льшее треніе, нежели гладкія. Смазка трущихся тѣлъ (водою, масломъ, мыломъ, саломъ) весьма значительно уменьшаетъ треніе..

Необходимо замѣтить, что эти законы тренія, достаточные для обыкновенныхъ случаевъ, встрѣчающихся въ практикѣ, обладаютъ только приблизительной точностью. Такъ, нѣкоторые изслѣдователи нашли, что коэффиціентъ тренія, строго говоря, не есть постоянная величина, а что онъ увеличивается при увеличеніи нормальнаго давленія и уменьшается при увеличеніи скорости; затѣмъ, что треніе при смазкѣ вращающихся частей машинъ прямо пропорціонально скорости, величинѣ поверхности, обратно пропорціонально толщинѣ слоя смазки и зависитъ отъ ея физическихъ свойствъ.

Коэффиціенты тренія скольженія.

Желѣзо по желѣзу безъ смазки.	0,44
Желѣзо по чугуну и бронзѣ безъ смазки	0,18
Бронза по бронзѣ и чугуну „ „	0,20
Дубъ по дубу (при ||-хъ волокнахъ) безъ смазки. . .	0,48
„ „ „ (при ⊥-хъ волокнахъ) „ „ . . .	0,34
„ „ „ при смазкѣ мыломъ	0,16
Чугунъ по дубу безъ смазки.	0,49
„ „ „ при смазкѣ мыломъ.	0,19

*) При движеніи тѣла, имѣющаго, напр., форму параллелепипеда (ящикъ, кирпичъ и т. п.), треніе будетъ *одно и то же*, какой бы изъ своихъ граней оно ни соприкасалось съ плоскостью. Это, впрочемъ, слѣдуетъ изъ 1-го закона, такъ какъ нормальное давленіе *всего тѣла* при этомъ не измѣняется.

Кожаный ремень по дереву 0,27
„ „ по чугуну 0,56
Сталь по льду 0,02
Кирпичъ или известнякъ по бетону. . . . . 0,65—0,67
Чугунъ, желѣзо, сталь, бронза } при слабой смазкѣ . 0,15—0,18
другъ о друга или сами о себя } при обыкновенной. 0,07—0,08

Примѣръ. Какую силу надо употребить для передвиженія дубоваго ящика вѣсомъ въ 15 пуд. по дубовому полу? Коэффиціентъ тренія $f=0{,}48$.

Отвѣтъ. $F=15.0{,}48=7{,}2$ пуда. Для первоначальнаго приведенія ящика въ движеніе потребуется сила нѣсколько большая, а именно $F'=15.0{,}62=9{,}3$ пуд., такъ какъ коэффиціентъ тренія въ началѣ движенія $f'=0{,}62$.

§ 265. **Треніе шиповъ (цапфъ) и пятниковъ.** Если діаметръ шипа равенъ діаметру подшипника, то, называя давленіе шипа на подшипникъ черезъ P, найдемъ, что треніе направлено по касательнымъ къ окружности шипа въ сторону, противоположную вращенію. Величина тренія $F=fP$, слѣдовательно, моментъ тренія относительно геометрической оси вала $M=fPr$, гдѣ r — радіусъ шипа. Работа тренія за одинъ оборотъ $T=fP\,.\,2\pi r$, а въ секунду: $T'=fP2\pi rn:60$.

Изъ послѣдняго выраженія видно, что величина работы тренія пропорціональна числу n оборотовъ шипа и его радіусу. Поэтому для уменьшенія работы тренія слѣдуетъ діаметры шиповъ дѣлать настолько малыми, насколько это допускается условіями прочности.

Треніе *плоской пяты* вертикальнаго вала о *плоское дно* подпятника опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что вертикальное давленіе, равномѣрно передаваемое пятою радіуса r на подпятникъ, равно P. Раздѣливъ площадь основанія пяты на очень большое число m равныхъ секторовъ, которые по ихъ малости можно считать за треугольники, получимъ, что на каждый секторъ приходится давленіе $=P:m$. Это давленіе можно считать сосредоточеннымъ въ центрѣ тяжести сектора, т.-е. въ разстояніи $\frac{2}{3}r$ отъ центра основанія пяты, такъ какъ вертикальныя давленія, приходящіяся на всѣ элементы площади одного и того же сектора, складываются, какъ параллельныя силы, въ одну равнодѣйствующую, приложенную къ его центру тяжести.

Работа тренія каждаго сектора пяты за одинъ оборотъ $=\frac{fP}{m}.2\pi.\left(\frac{2}{3}r\right)$, слѣдовательно, работа всей площади пяты

$$\text{за одинъ оборотъ} = m.\frac{fP}{m}.\ 2\pi\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{3}\pi rfP,$$

$$\text{а въ секунду: } \frac{4}{3}\pi rfP\frac{n}{60}.$$

§ 266. **Треніе катанія.** Въ опытахъ Кулона надъ треніемъ катанія цилиндрическій катокъ приводился въ равномѣрное движеніе по двумъ брусьямъ отъ дѣйствія двухъ различныхъ грузовъ P и Q (фиг. 142). Очевидно, что при этомъ треніе F = движущей силѣ $P - Q$. Изъ этихъ опытовъ Кулонъ нашелъ, что треніе при катаніи

$$F = f\frac{N}{r} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

гдѣ N — полное нормальное давленіе катка и грузовъ, r — радіусъ катка, f — коэффиціентъ тренія катанія. Такимъ образомъ треніе катанія: 1) *прямо пропорціонально нормальному давленію* и 2) *обратно пропорціонально радіусу катка.*

Фиг. 142.

При одномъ и томъ же нормальномъ давленіи треніе катанія всегда значительно менѣе тренія скольженія.

Изъ уравненія (2) имѣемъ, что

$$f = \frac{F}{N}r,$$

т.-е. что коэффиціентъ тренія катанія представляетъ именованное число, а именно нѣкоторую длину, выраженную въ тѣхъ же мѣрахъ, какъ и радіусъ катка.

Изъ равенства $F.r = N.f$, которое можно разсматривать, какъ уравненіе динамическаго равновѣсія силъ F и N, т.-е. движущей силы и нормальнаго сопротивленія плоскости, заключаемъ, что при катаніи нормальное сопротивленіе N плоскости отступаетъ въ сторону движенія отъ вертикали, проходящей черезъ центръ катка, на величину f коэффиціента тренія 2-го рода.

Коэффиціенты тренія катанія.

Колесо съ желѣзнымъ ободомъ по шоссе. 4,1	сантим.
Деревянный катокъ по дереву 0,16	„
Чугунное колесо по желѣзному рельсу 0,12	„
Желѣзное колесо по желѣзному рельсу 0,05	„

Примѣръ. Какая нужна сила, чтобы катить паровозъ вѣсомъ 5400 килогр. по рельсамъ, если діаметръ колесъ $=90$ сантим.?

Отвѣтъ. $F=0{,}05\,.\,\dfrac{5400}{45}=6$ килогр., между тѣмъ, если бы колеса только скользили бы по рельсамъ, а не катились, то сила тренія была бы $=0{,}18\,.\,5400=972$ килогр. Въ виду этого стараются, гдѣ только возможно, замѣнить треніе скольженія треніемъ катанія.

Приложенія тренія въ обыденной жизни и техникѣ очень разнообразны: безъ тренія человѣкъ почти не могъ бы ходить по землѣ; паровозъ движетъ громадный поѣздъ благодаря тренію (сцѣпленію) между колесами и рельсами; если, что случается при сырой погодѣ, треніе между ними ослабѣваетъ, то отъ дѣйствія паровой машины колеса вертятся на одномъ мѣстѣ (боксуютъ). Треніемъ держатся гвозди въ стѣнѣ, гайка на винтѣ, пробка въ бутылкѣ и т. д.

2. Жесткость веревокъ.

§ 267. Положимъ, что вертикальной силой P слѣдуетъ поднять грузъ Q при помощи веревки, перекинутой черезъ неподвижный блокъ. Если бы веревка была вполнѣ гибкой, то начальная и конечная точки касанія ея совпадали бы съ концами горизонтальнаго діаметра блока. Написавъ уравненіе равенства моментовъ относительно центра блока $Pr=Qr$ (гдѣ r — радіусъ блока), мы изъ него получили бы, что $P=Q$, т.-е. что при равномѣрномъ движеніи движущая сила должна равняться сопротивленію груза.

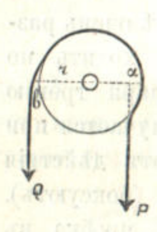
Въ дѣйствительности однако этого не происходитъ и движущая сила всегда должна быть немного болѣе сопротивленія груза. Кромѣ потери на треніе оси блока въ обоймицѣ, часть движущей силы тратится на особаго рода сопротивленіе, происходящее отъ жесткости или неполной гибкости веревки. Вслѣдствіе своей жест-

кости, набѣгающая часть веревки касается окружности блока нѣсколько выше конца горизонтальнаго діаметра, а сбѣгающая часть веревки покидаетъ окружность нѣсколько ниже другого конца этого діаметра (фиг. 143). Поэтому плечо груза Q немного увеличивается, а плечо силы P немного уменьшается.

Обозначивъ черезъ a и b соотвѣтственныя увеличеніе и уменьшеніе плечъ силъ Q и P, изъ уравненія моментовъ получимъ

$$P(r-a)=Q(r+b),\text{ откуда } P=Q\frac{r+b}{r-a} \text{ или } P=Q+\frac{a+b}{r-a}Q.$$

Членъ $\frac{a+b}{r-a}Q$, показывающій, насколько слѣдуетъ увеличить движущую силу для поддержанія или равномѣрнаго подниманія груза Q, и представляетъ то сопротивленіе, которое называютъ жесткостью веревки. Его обыкновенно обозначаютъ буквою S. Изслѣдованія показали, что это сопротивленіе представляетъ очень сложную величину, зависящую отъ многихъ обстоятельствъ. Вообще можно сказать, что жесткость новой пеньковой веревки болѣе, чѣмъ старой, мокрой или смоленой болѣе, чѣмъ сухой и несмоленой. Кулонъ нашелъ, что жесткость можетъ быть выражена формулой



Фиг. 143.

$$S=\frac{A+BQ}{D},$$

гдѣ D — діаметръ блока, увеличенный на діаметръ веревки, A и B — численные коэффиціенты, зависящіе отъ діаметра веревки, числа ея прядей и давности. *Прони* вывелъ, что $A=4{,}9d^k$ и $B=0{,}106d^k$ (въ метрахъ), причемъ $k=1{,}7$ для новыхъ веревокъ и $k=1{,}4$ для старыхъ. Однако въ большинствѣ случаевъ предпочитаютъ пользоваться одночленными формулами *Редтенбахера:*

$$S=13d^2\frac{Q}{r} \text{ клгр. (для веревокъ)}$$

и $$S=26d^2\frac{Q}{r} \text{ клгр. (для проволочныхъ канатовъ),}$$

гдѣ d (діам. веревки) и r (радіусъ блока) выражены въ метрахъ.

3. Сопротивленіе среды.

§ 268. **Сопротивленіе среды** при движеніи тѣлъ въ жидкостяхъ и газахъ происходитъ вслѣдствіе сообщенія скорости, а слѣдовательно, и живой силы частицамъ среды, вытѣсняемой движущимся тѣломъ, и, кромѣ того, вслѣдствіе тренія боковой поверхности тѣла о частицы среды.

Положимъ, что пластинка, площадь которой A, движется въ неподвижной средѣ со скоростью v, перпендикулярной ея плоскости. Тогда, допустивъ, что вытѣсняемымъ частицамъ среды сообщается та же самая скорость v и назвавъ объемъ, вытѣсняемой въ секунду среды черезъ Q, а вѣсъ кубической единицы ея черезъ γ, получимъ, что живая сила, сообщаемая въ секунду средѣ $= \frac{Q\gamma v^2}{2g}$. Эта живая сила, очевидно, равна работѣ сопротивленія R среды въ секунду, т.-е. Rv. Приравнявъ другъ другу эти оба выраженія, найдемъ, что $R = \frac{Q\gamma v}{2g}$, или, замѣтивъ, что объемъ Q пропорціоналенъ площади A пластинки и ея скорости v, такъ что $Q = kAv$ (гдѣ k — коэффиціентъ пропорціональности, находимый изъ опытовъ), окончательно получимъ:

$$R = kA\gamma \frac{v^2}{2g}.$$

Если среда сама двигалась со скоростью v', то въ эту формулу вмѣсто v слѣдуетъ подставить величину относительной скорости $v - v'$ (для движеній въ одну сторону) или $v + v'$ (для встрѣчныхъ движеній).

Если двигалась не пластинка, а нѣкоторое тѣло, то A означаетъ площадь его проекціи на направленіе, перпендикулярное къ движенію.

Эмпирическій коэффиціентъ k для пластинки, движущейся въ водѣ и въ воздухѣ, равенъ 1,8; для куба, движущагося въ водѣ $k = 1,46$; для призмы и цилиндра, длина которыхъ не болѣе 4—6 діаметровъ основанія, $k = \frac{4}{3}$. При увеличеніи продольныхъ размѣровъ, коэффиціентъ k увеличивается. Болѣе всего величина k зависитъ отъ формы передней части тѣла, разсѣкающей среду. Для

цилиндра, движущагося перпендикулярно къ своей оси, $k = \frac{2}{3}$; для шара $k = 0{,}5$; для полаго полушарія съ тонкими стѣнками, движущагося впередъ своей вогнутой поверхностью, $k = 2{,}5$.

Для плавающихъ тѣлъ, погруженныхъ только отчасти въ жидкость, сопротивленіе среды значительно менѣе, какъ вслѣдствіе уменьшенія площади проекціи погруженной части, такъ и вслѣдствіе уменьшенія коэффиціента k, который для призмъ, движущихся по направленію оси, равенъ 1,1, а для тѣлъ съ заостренной передней поверхностью (судовъ) измѣняется отъ 0,05 до 0,3.

Простыя машины.

§ 269. **Машиною** *называется несвободное тѣло или нѣсколько соединенныхъ между собою несвободныхъ тѣлъ, имѣющихъ вполнѣ опредѣленныя движенія и служащихъ для передачи работы движущей силы тѣламъ, подвергающимся перемѣщенію или обработкѣ.* Движеніе, сообщаемое силой, приложенной къ извѣстной части машины *(пріемнику)*, видоизмѣняется или преобразовывается во всякой машинѣ вполнѣ опредѣленнымъ образомъ въ зависимости отъ ея устройства. Особая часть машины (*орудіе* или *исполнительный механизмъ*) дѣйствуетъ на данное тѣло, при чемъ происходитъ или перемѣщеніе всего тѣла, или перемѣщеніе отдѣльныхъ частицъ его (т.-е. рѣзаніе, сжатіе, раздробленіе или вообще какое-либо измѣненіе вида тѣла).

Препятствія, представляемыя такимъ перемѣщеніямъ, называются *полезными сопротивленіями*, такъ какъ преодолѣніе ихъ и составляетъ назначеніе машины.

Посредствомъ машинъ можно измѣнять направленіе силы, измѣнять скорость движенія и измѣнять величину силы. Это можно легко видѣть на рычагѣ, представляющемъ простѣйшую машину. Никакая машина, однако, не можетъ увеличить работу движущей силы; даже, наоборотъ, во всякой машинѣ нѣкоторая часть работы двигателя неизбѣжно тратится на преодолѣніе *вредныхъ сопротивленій* (треніе, удары, сопротивленіе среды).

Итакъ, на всякую машину дѣйствуютъ: 1) движущія силы; 2) полезныя сопротивленія; 3) вредныя сопротивленія.

Сюда слѣдуетъ еще присоединить вѣсъ самой машины или ея движущихся частей, который въ однихъ случаяхъ представляетъ движущую силу, а въ другихъ—вредное сопротивленіе.

§ 270. При устройствѣ машины всегда стараются достигнуть того, чтобы она имѣла болѣе или менѣе равномѣрное движеніе. Быстрыя измѣненія скорости машины дѣйствуютъ на нее какъ удары, разстраивающіе соединенія частей и вредно отзывающіеся на правильности движенія и на прочности машины. Сверхъ того, какъ показали изслѣдованія, работа машины является наиболѣе производительною при установившемся равномѣрномъ движеніи съ извѣстной опредѣленной скоростью. Равномѣрность движенія представляетъ, однако, весьма трудно, а иногда и вовсе невыполнимое условіе. Вполнѣ она можетъ быть достигнута сравнительно въ немногихъ машинахъ и между прочимъ въ такъ называемыхъ *простыхъ машинахъ*, состоящихъ изъ одного подвижного тѣла.

Къ простымъ машинамъ относятся *рычагъ* и его видоизмѣненія: *блокъ* и *воротъ*, а также *клинъ* и *винтъ*, представляющіе видоизмѣненія наклонной плоскости.

Если машина находится въ покоѣ или въ равномѣрномъ движеніи, то всѣ приложенныя къ ней силы, какъ положительныя (т.-е. движущія силы), такъ и отрицательныя (полезныя и вредныя сопротивленія) должны взаимно уравновѣшиваться, т.-е. должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ равновѣсія.

Такъ какъ простыя машины представляютъ несвободныя тѣла, имѣющія, за исключеніемъ подвижного блока и винта, только одно опредѣленное поступательное (клинъ) или вращательное движеніе (рычагъ, неподвижный блокъ, воротъ), то для выраженія условій равновѣсія придется пользоваться или *уравненіемъ проекцій силъ* на направленіе движенія, или *уравненіемъ моментовъ силъ* относительно оси или точки вращенія. Только для подвижного блока и винта, имѣющихъ какъ поступательное, такъ и вращательное движеніе, должны быть удовлетворены два уравненія равновѣсія.

§ 271. Но вмѣсто этихъ статическихъ уравненій часто бываетъ выгодно воспользоваться *уравненіемъ работъ*, какъ общимъ уравненіемъ динамическаго равновѣсія, состоящемъ въ томъ, что при равновѣсіи алгебраическая сумма работъ всѣхъ приложенныхъ къ машинѣ силъ должна равняться нулю, или, употребляя иное

выраженіе, что работа движущихъ силъ должна равняться работѣ всѣхъ сопротивленій (§ 189).

Если обозначимъ черезъ T работу движущихъ силъ, черезъ T_1— работу полезныхъ сопротивленій, черезъ T_2—работу вредныхъ сопротивленій, то $T = T_1 + T_2$ или $T_1 = T - T_2$,

откуда $$\frac{T_1}{T} = 1 - \frac{T_2}{T} = \eta,$$

т.-е. отношеніе $(T_1 : T)$ работы полезныхъ сопротивленій къ работѣ движущихъ силъ всегда менѣе единицы. Это отношеніе, которое обозначаютъ буквой η и которое, какъ видно, представляетъ правильную дробь, называютъ *коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія машины*. Въ различныхъ машинахъ онъ имѣетъ различную величину, но машина, вообще говоря, считается хорошей, если коэффиціентъ полезнаго дѣйствія ея колеблется въ предѣлахъ отъ 0,6 до 0,8, т.-е. когда работа полезныхъ сопротивленій составляетъ отъ 60% до 80% работы двигателя.

§ 272. Если пренебречь работой вредныхъ сопротивленій, какъ это иногда допускается, и предположить, что на машину дѣйствуютъ только движущая сила P и полезное сопротивленіе Q, то, обозначивъ пути, проходимые ихъ точками приложенія по направленію силъ черезъ s_1 и s_2, получимъ равенство $Ps_1 = Qs_2$ или

$$P : Q = s_2 : s_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

т.-е. *движущая сила и сопротивленіе обратно-пропорціональны путямъ, проходимымъ ими въ одно и то же время*. Такъ какъ въ равномѣрныхъ движеніяхъ $s_2 : s_1 = v_2 : v_1$, то пропорцію (a) можно представить въ видѣ

$$P : Q = v_2 : v_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

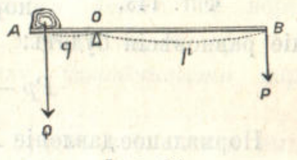
что выражаютъ такимъ образомъ: *въ машинѣ сколько выигрывается въ силѣ, столько же теряется въ скорости.*

Примѣчаніе. Необходимо, однако, помнить, что это выраженіе далеко не вполнѣ правильно и допускается только, какъ довольно грубое приближеніе къ истинѣ, да и то лишь для такихъ машинъ, какъ рычагъ, простой блокъ, воротъ. Если принять, что вредныя сопротивленія въ машинѣ поглощаютъ 50% работы двигателя, то въ такомъ случаѣ окажется, что, напр., *двойной* выигрышъ въ

силѣ сопровождается *четверной* потерей въ скорости. На практикѣ въ большинствѣ случаевъ стараются посредствомъ машинъ получить прежде всего значительный выигрышъ въ силѣ, необходимый для преодолѣнія большихъ сопротивленій, напр., при перемѣщеніи тяжестей, такъ что потеря въ скорости имѣетъ обыкновенно лишь второстепенное значеніе.

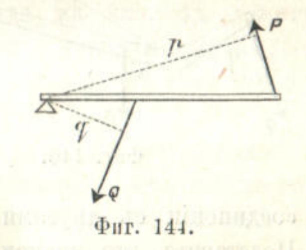
Рычагъ.

§ 273. **Рычагомъ** называется твердый стержень, имѣющій неподвижную ось. Рычаги, въ зависимости отъ ихъ формы, бываютъ *прямолинейные* (фиг. 64 и 144), *криволинейные* (фиг. 145) и *ломаные* или *колѣнчатые* (фиг. 146). Въ зависимости же отъ положенія неподвижной точки или оси различаютъ рычаги *перваго рода*, если точка опоры находится между силами (фиг. 64 и 146), и рычаги *второго рода*, если точка опоры лежитъ по одну сторону отъ приложенныхъ силъ *) (фиг. 144 и 145).



Фиг. 64.

Предполагая, какъ это обыкновенно и бываетъ, что всѣ приложенныя къ рычагу силы лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ оси, легко найдемъ общее условіе равновѣсія для рычаговъ всѣхъ видовъ изъ уравненія: сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно неподвижной оси должна равняться нулю (§ 172).



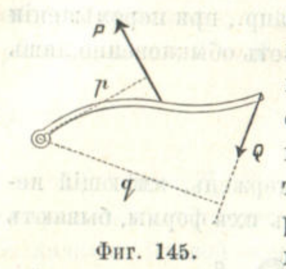
Фиг. 144.

Если обозначимъ черезъ P—движущую силу, Q—сопротивленіе, p и q—плечи этихъ силъ относительно неподвижной точки, то, пренебрегая вѣсомъ рычага и силой тренія, получимъ уравненіе равновѣсія

$$Pp - Qq = 0, \qquad \text{откуда } P = \frac{Qq}{p}.$$

*) Нѣкоторые авторы, разсматривая отдѣльно движущую силу и сопротивленіе, различаютъ рычаги 3-хъ родовъ: рычагъ 1-го рода, если точка опоры лежитъ между силой P и сопротивленіемъ Q (фиг. 64); рычагъ 2-го рода, если точка приложенія сопротивленія Q лежитъ между точкой опоры и силой P (фиг. 144); рычагъ 3-го рода, если точка приложенія силы P лежитъ между точкой опоры и сопротивленіемъ Q (фиг. 145).

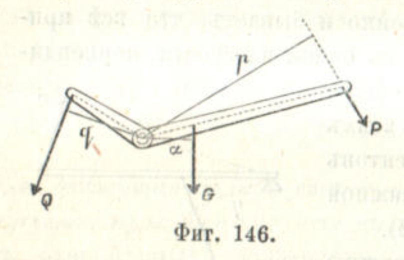
Для болѣе точнаго опредѣленія силы P въ уравненіе равновѣсія слѣдуетъ включить моментъ вѣса рычага и моментъ силы тренія его оси, если она имѣетъ видъ цапфы *) (фиг. 146). При этомъ замѣтимъ, что моментъ вѣса будетъ положительный или отрицательный, смотря по положенію центра тяжести рычага относительно точки опоры; онъ будетъ равенъ нулю, если центръ тяжести совпадаетъ съ точкой опоры. Итакъ (фиг. 146), если вѣсъ рычага G, плечо его a, радіусъ цапфы r и нормальное давленіе на нее N, то уравненіе равновѣсія будетъ:



Фиг. 145.

$$Pp - Qq + Ga - fNr = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Нормальное давленіе N представляетъ равнодѣйствующую всѣхъ приложенныхъ къ рычагу силъ P, Q и G. Если эти силы вертикальны, то N равно ариѳметической суммѣ ихъ. Подставивъ эту величину въ уравненіе (1) легко, опредѣлимъ изъ него искомую силу P (коэффиціентъ тренія f можно принять $= 0{,}1$). Если же силы P и Q не вертикальны, то опредѣленіе силы P изъ уравненія (1) представляетъ порядочное затрудненіе. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ въ выраженіе N, какъ равнодѣйствующей пересѣкающихся силъ P, Q и G, искомая величина P войдетъ въ соединеніи съ другими величинами подъ знакомъ квадр. корня. Подставивъ это значеніе N въ ур-іе (1), получимъ квадратное уравненіе довольно сложнаго вида. Чтобы избѣжать этого, для опредѣленія силы P пользуются слѣдующимъ приблизительнымъ вычисленіемъ: полагая въ ур-іи (1) $f = 0$, опредѣляютъ сперва приблизительную величину $P = \frac{Qq - Ga}{p}$, затѣмъ, подставляя ее въ ирраціональное выраженіе, опредѣляютъ величину N, которую



Фиг. 146.

*) Если ось вращенія представляетъ острое ребро призмы (какъ, напр., въ вѣсахъ), то треніе считаютъ равнымъ нулю.

и подставляютъ снова въ ур-іе (1) для окончательнаго опредѣленія величины силы P.

§ 274. **Обыкновенные вѣсы** съ коромысломъ представляютъ одно изъ примѣненій рычага. Такъ какъ устройство ихъ описывается во всѣхъ руководствахъ физики, то мы здѣсь ограничимся лишь разсмотрѣніемъ двухъ главныхъ качествъ, требуемыхъ отъ хорошихъ вѣсовъ, а именно ихъ вѣрности и чувствительности.

Въ **вѣрныхъ** вѣсахъ коромысло должно быть горизонтально, если обѣ чашки свободны или, если на нихъ положены равные грузы. Для этого, очевидно, должны быть соблюдены два условія:

1) оба плеча коромысла должны быть равны между собою;

2) центръ тяжести коромысла долженъ лежать на вертикали, проходящей черезъ точку опоры коромысла, и при томъ *ниже* этой точки, что необходимо для *устойчивости* коромысла.

Дѣйствительно, если центръ тяжести будетъ находиться выше точки опоры, то коромысло будетъ въ неустойчивомъ равновѣсіи, а если центръ тяжести будетъ совпадать съ точкой опоры, то коромысло будетъ въ безразличномъ равновѣсіи. Въ первомъ случаѣ, при малѣйшемъ отклоненіи отъ горизонтальнаго положенія, коромысло опрокинется отъ дѣйствія собственнаго вѣса, а во второмъ случаѣ, коромысло будетъ въ равновѣсіи при произвольномъ наклонномъ положеніи, но лишь тогда, когда на чашкахъ лежатъ равные грузы. Если же на чашки положить неравные грузы, то коромысло отъ разности моментовъ ихъ опрокинется на 90° въ сторону бо́льшаго груза.

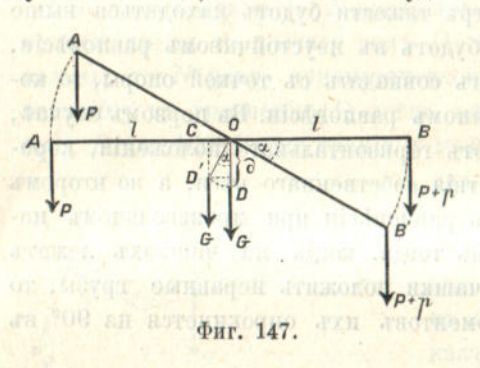
Чувствительностью вѣсовъ называется способность коромысла составлять съ горизонталью замѣтный уголъ (или, что все равно, способность стрѣлки коромысла замѣтно отходить отъ дѣленія 0) при весьма незначительномъ грузѣ, положенномъ на одной изъ чашекъ, напр., при грузѣ въ 1 миллиграммъ. Изъ двухъ вѣсовъ будутъ чувствительнѣе тѣ, у которыхъ при одинаковомъ грузѣ коромысло отклонится на бо́льшій уголъ.

Положимъ (фиг. 147), что l—длина каждаго плеча, d—разстояніе центра тяжести отъ точки опоры, G—вѣсъ коромысла, P—вѣсъ каждой чашки. Когда на одну изъ чашекъ положимъ весьма малый грузъ p, то коромысло наклонится исключительно подъ дѣйствіемъ момента этого груза, если, какъ это обыкновенно

и дѣлается, точка опоры O и точки привѣса A и B лежатъ на одной прямой, такъ какъ равные и противоположные моменты вѣса P чашекъ всегда взаимно уравновѣшиваются. По мѣрѣ увеличенія угла α наклоненія коромысла, моментъ $pl\cos\alpha$ груза будетъ все уменьшаться, въ это же время центръ тяжести коромысла будетъ подниматься и моментъ вѣса его $G.OC = Gd\sin\alpha$ будетъ все увеличиваться. Очевидно, что существуетъ такой уголъ α наклоненія коромысла, при которомъ оба эти момента уравновѣсятся, такъ что $Gd\sin\alpha = pl\cos\alpha$,

откуда $$\tan g\alpha = p\frac{l}{Gd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

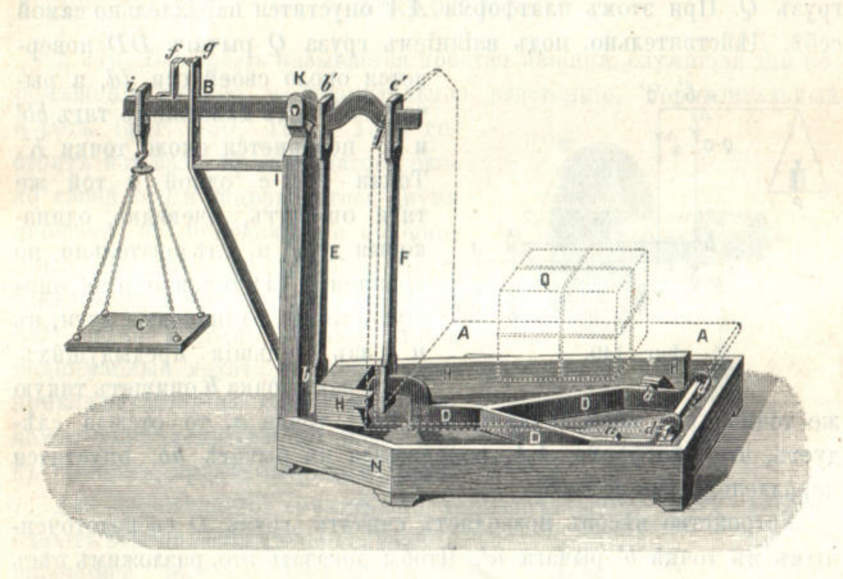
Итакъ, уголъ α наклоненія коромысла при одномъ и томъ же грузѣ p будетъ тѣмъ больше или, иначе говоря, вѣсы будутъ тѣмъ чувствительнѣе, чѣмъ болѣе будетъ длина l плечъ коромысла, чѣмъ менѣе будетъ вѣсъ G коромысла и чѣмъ менѣе будетъ разстояніе d центра тяжести отъ точки опоры. Въ весьма точныхъ физическихъ вѣсахъ первое условіе не соблюдается (т.-е. плечи дѣлаются короткія), какъ потому, что оно противорѣчитъ второму условію — легкости коромысла, так и потому, что длинныя плечи легко подвергаются изгибу. Для легкости и лучшаго сопротивленія изгибу коромысло дѣлается въ видѣ растянутаго металлическаго ромба съ вырѣзами. Для соблюденія 3-го условія *чувствительности*, въ верхней части коромысла надъ точкой опоры помѣщается винтъ съ гайкой, перемѣщая которую вверхъ, можно приблизить центръ тяжести къ точкѣ опоры.



Фиг. 147.

§ 275. **Десятичные вѣсы**, весьма часто употребляющіеся для взвѣшиванія большихъ грузовъ, представляютъ очень остроумную систему трехъ рычаговъ. Рычагъ ic' (фиг. 148), имѣющій неподвижную точку K, несетъ на одномъ концѣ своемъ i чашку вѣсовъ, а на другомъ двѣ свободно подвѣшенныя тяги $b'b$ и $c'c$.

Тяга $c'c$ сочленена съ вилообразнымъ рычагомъ DD, имѣющимъ неподвижную ось dd, тяга же $b'b$ соединена съ третьимъ рычагомъ ba, несущимъ на себѣ платформу для грузовъ и опирающимся на второй рычагъ DD въ точкахъ a, a. Такимъ образомъ, вѣсъ груза Q, помѣщеннаго на платформу, передается двумя рычагами и ихъ тягами въ точки b' и c' перваго рычага. Равновѣсіе опредѣляется положеніемъ остріевъ двухъ призмъ f и g, изъ которыхъ первая помѣщена на стойкѣ, укрѣпленной на рычагѣ ic', а вторая помѣщена на стойкѣ, составляющей одно цѣлое съ неподвижнымъ деревяннымъ ящикомъ N вѣсовъ.



Фиг. 148.

Чтобы десятичные вѣсы удовлетворяли своему назначенію, необходимо:

1) чтобы равновѣсіе не зависѣло отъ положенія груза Q на платформѣ;

2) чтобы гирями, помѣщенными въ чашку вѣсовъ, можно было уравновѣшивать въ 10 разъ большіе грузы.

Первое условіе удовлетворяется тѣмъ, что отношеніе (n) разстояній неподвижной точки K (фиг. 149) отъ точекъ c' и b' при-

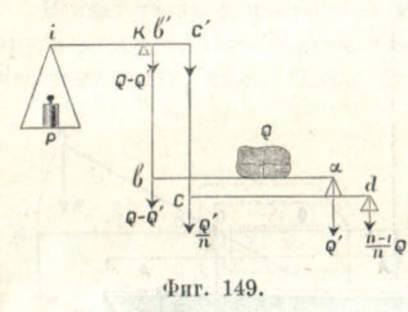
вѣса тягъ равняется отношенію плечъ cd и ad рычага DD, т.-е. тѣмъ, что

$$\frac{Kc'}{Kb'}=\frac{dc}{da}=n \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Для выполненія второго условія слѣдуетъ, чтобы

$$\frac{Kb'}{Ki}=\frac{1}{10} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Докажемъ это. Помѣстимъ въ какомъ угодно мѣстѣ платформы грузъ Q. При этомъ платформа AA опустится параллельно самой себѣ. Дѣйствительно, подъ вліяніемъ груза Q рычагъ DD повернется около своей оси dd, а рычагъ ic' подъ дѣйствіемъ тягъ bb' и cc' повернется около точки K. Точки c' и c одной и той же тяги опишутъ, очевидно, одинаковыя дуги, а, слѣдовательно, по уравненію (1) точки a и b' опишутъ также одинаковыя дуги, въ n разъ меньшія предыдущихъ.



Фиг. 149.

Такъ какъ точка b опишетъ такую же точно дугу, какъ точка b' или какъ точка a, то отсюда слѣдуетъ, что платформа AA, покоящаяся на рычагѣ ab, опустится параллельно самой себѣ.

Устройство вѣсовъ позволяетъ считать грузъ Q сосредоточеннымъ въ точкѣ b' рычага ic'. Чтобы доказать это, разложимъ вѣсъ Q на слагающую Q', приложенную въ точкѣ a, и слагающую $Q-Q'$, приложенную въ точкѣ b или, что все равно, въ точкѣ b'. Слагающая Q' въ свою очередь разложится на слагающую $\frac{Q'}{n}$, приложенную въ точкѣ c рычага DD или, что все равно, въ точкѣ c' рычага ic', и на слагающую $\frac{n-1}{n}Q'$, приложенную къ неподвижной оси dd и уничтожающуюся ея сопротивленіемъ.

Приведемъ силу $\frac{Q'}{n}$ къ точкѣ b', т.-е. найдемъ такую силу x, приложенную въ точкѣ b', чтобы ея моментъ былъ бы равенъ

моменту силы $\frac{Q'}{n}$ относительно одной и той же точки K. Изъ уравненія $x.Kb' = \frac{Q'}{n} Kc'$, получаемъ, что $x = \frac{Q'}{n} . \frac{Kc'}{Kb'} = Q'$.

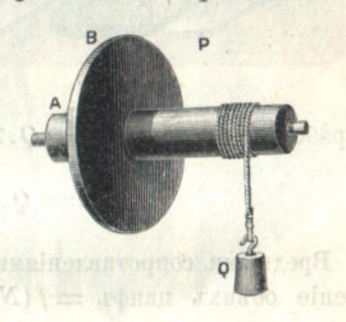
Итакъ, можно считать, что къ точкѣ b' приложены два груза $Q - Q'$ и Q' или весь грузъ Q, что и слѣдовало доказать.

Если P—вѣсъ гирь, уравновѣшивающихъ грузовъ Q, то

$$P.Ki = Q.Kb', \qquad \text{откуда} \quad P = Q\frac{Kb'}{Ki} = 0{,}1\,Q.$$

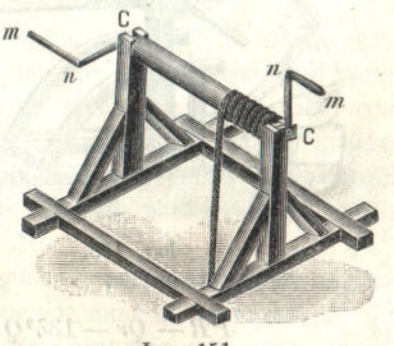
Воротъ.

§ 276. *Воротомъ* называется простая машина, служащая для перемѣщенія грузовъ на значительное разстояніе. Горизонтальный воротъ (фиг. 150, 151 и 152) состоитъ изъ вала, вращающагося около своей оси и опирающагося двумя цапфами на неподвижные подшипники. На валъ намотана веревка, одинъ конецъ которой укрѣпленъ на валу, а на другомъ подвѣшивается поднимаемый грузъ. Движущая сила прикладывается къ колесу или ручкамъ, укрѣпленнымъ на валу, или къ спицамъ, продѣтымъ сквозь валъ.



Фиг. 150.

Для перемѣщенія грузовъ по горизонтальному пути употребляютъ вертикальный воротъ, вращающійся въ подпятникѣ помощью рычаговъ, называемыхъ *анщпугами* (фиг. 153). Такой воротъ называется *шпилемъ* или *кабестаномъ*.

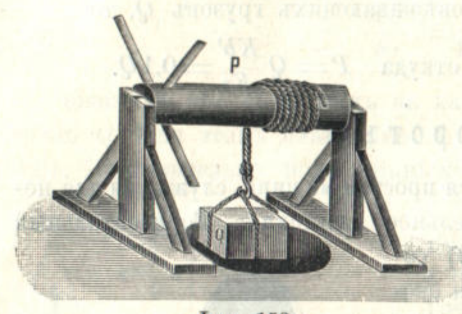


Фиг. 151.

Такъ какъ воротъ есть тѣло, имѣющее неподвижную ось, то для равновѣсія его необходимо, чтобы сумма моментовъ всѣхъ дѣйствующихъ на него силъ относительно этой оси была равна нулю. Если r — радіусъ вала, R — радіусъ колеса или рукоятки

P—движущая сила и Q—перемѣщаемый грузъ, то, спроектировавъ силы на плоскость, перпендикулярную къ оси и не принимая во вниманіе вредныхъ сопротивленій, напишемъ уравненіе моментовъ

$$PR - Qr = 0, \quad \text{откуда} \quad P = Q\frac{r}{R}, \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$



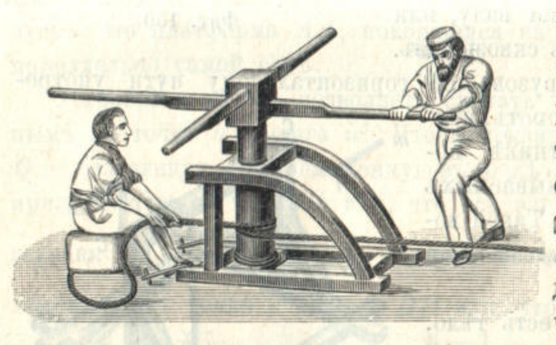
Фиг. 152.

т.-е. движущая сила во столько разъ меньше сопротивленія, во сколько радіусъ вала меньше радіуса колеса (или длины рукоятки).

Это соотношеніе легко можно получить и изъ уравненія работъ. Дѣйствительно, работа силы за одинъ оборотъ вала равна $P.2\pi R$, а работа сопротивленія $= Q.2\pi r$. Слѣдовательно

$$P.2\pi R = Q.2\pi r, \text{ откуда } \frac{P}{Q} = \frac{r}{R}.$$

Вредными сопротивленіями въ горизонтальномъ воротѣ будутъ: треніе обѣихъ цапфъ $= f(N_1 + N_2)$, гдѣ N_1 и N_2—нормальныя давленія, и жесткость веревки $S = \frac{13\delta^2}{r} Q$.



Фиг. 153.

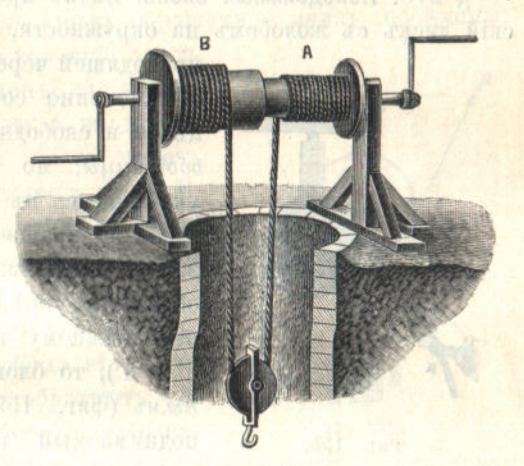
Моменты этихъ сопротивленій относительно оси: $f(N_1 + N_2)\rho$, гдѣ ρ — радіусъ цапфы и $Sr = 13\delta^2 Q$. Поэтому дѣйствительная величина движущей силы P опредѣлится по уравненію

$$PR - Qr - 13\delta^2 Q - f(N_1 + N_2)\rho = 0 \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Нормальныя давленія N_1 и N_2 опредѣляются точно такъ же, какъ въ рычагѣ.

Въ случаѣ вертикальнаго ворота слѣдуетъ въ ур-іе (2) вставить моментъ тренія вала о подпятникъ $= -\frac{2}{3}fG\rho$, а при вычисленіи нормальныхъ давленій опустить члены, содержащіе вѣсъ G ворота.

§ 277. **Дифференціальный или китайскій воротъ.** Выигрышъ въ силѣ, получаемый въ обыкновенномъ воротѣ, измѣряется отношеніемъ $\frac{r}{R}$. Поэтому, казалось бы, что, уменьшая радіусъ r вала и увеличивая радіусъ R колеса (или длину рукоятки), можно получить неограниченный выигрышъ силы. Въ дѣйствительности, однако, уменьшеніе радіуса вала ограничено условіемъ его прочности, а увеличеніе радіуса колеса или длины рукоятки представляетъ то неудобство, что, или вызываетъ увеличеніе вѣса ворота, а слѣдовательно и увеличеніе тренія, или дѣлаетъ затруднительнымъ вращеніе рукоятки. Оба эти затрудненія исключены въ такъ называемомъ дифференціальномъ или китайскомъ воротѣ. Этотъ воротъ (фиг. 154) представляетъ соединеніе двухъ цилиндрическихъ валовъ A и B, имѣющихъ общую ось и различные діаметры. Грузъ вѣшается на крюкъ блока, обхваченнаго веревкой, одна часть которой намотана на валъ A, а другая на валъ B такимъ образомъ, что, при вращеніи ручки ворота, веревка сматывается съ тонкаго вала и наматывается на толстый, вслѣдствіе чего грузъ и блокъ поднимаются.



Фиг. 154.

Если Q—вѣсъ груза и блока, поровну распредѣленный на каждой веревкѣ, P—движущая сила, приложенная къ рукояткѣ, R и r радіусы валовъ, l—длина рукоятки, то уравненіе моментовъ будетъ:

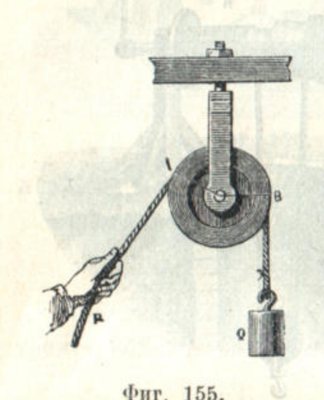
$$PL + \frac{Q}{2}r - \frac{Q}{2}R = 0, \text{ откуда } P = \frac{Q(R-r)}{2L} \text{ или } \frac{P}{Q} = \frac{R-r}{2L} \ldots (3)$$

Итакъ, при употребленіи китайскаго ворота выигрышъ въ силѣ прямо пропорціоналенъ разности радіусовъ валовъ, а такъ какъ эту разность можно сдѣлать произвольно малой, то, слѣдовательно, выигрышъ въ силѣ можно сдѣлать произвольно большимъ.

Равенство (2) можно было бы легко вывести и изъ уравненія работъ.

Блоки и полиспасты.

§ 278. **Неподвижный блокъ.** Блокъ представляетъ круглый плоскій дискъ съ жолобомъ на окружности, вращающійся около оси, проходящей черезъ его центръ. Ось блока обыкновенно составляетъ съ нимъ одно цѣлое и свободно вращается въ гнѣздахъ *обоймицы*, но иногда она неподвижно укрѣпляется въ обоймицѣ и тогда блокъ свободно вращается около оси. Блоки бываютъ неподвижные и подвижные. Если обоймица укрѣплена или подвѣшена къ неподвижному предмету (балкѣ, потолку и т. п.), то блокъ называется *неподвижнымъ* (фиг. 155). Движущая сила P и поднимаемый грузъ Q дѣйствуютъ въ неподвижномъ блокѣ на концы веревки, перекинутой черезъ жолобъ. Если R и r — радіусы блока и его оси, то условіе равновѣсія выразится слѣдующимъ уравненіемъ моментовъ



Фиг. 155.

$$PR - QR = 0, \quad \text{откуда } P = Q, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

т.-е. *движущая сила равна поднимаемому грузу.* Такимъ образомъ неподвижный блокъ не даетъ никакого выигрыша въ силѣ; онъ употребляется лишь для измѣненія направленія силы наиболѣе выгоднымъ образомъ, вслѣдствіе чего его иногда называютъ *направляющимъ* блокомъ.

Въ дѣйствительности, вслѣдствіе тренія fN въ оси и жесткости S веревки, движущая сила бываетъ обыкновенно на 15%—20% болѣе вѣса груза, при чемъ около $\frac{2}{3}$ этого сопротивленія происходитъ отъ жесткости веревки.

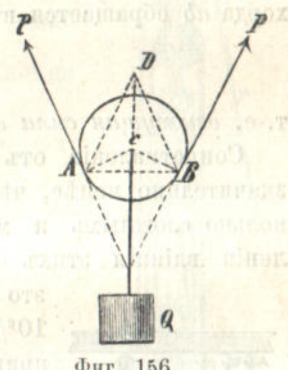
Дѣйствительную величину силы P можно опредѣлить по уравненію

$$PR - QR - SR - fNr = 0$$

При *параллельныхъ* веревкахъ нормальное давленіе $N = P + Q$ или приблизительно $= 2Q$, а при *непараллельныхъ* веревкахъ $N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$, гдѣ α — уголъ, образуемый вѣтвями веревки. Полагая приближенно, что $P = Q$, получимъ, что

$$N = \sqrt{2Q^2(1+\cos\alpha)} = 2Q\cos\frac{\alpha}{2}.$$

§ 279. **Подвижной блокъ.** Въ подвижномъ блокѣ (фиг. 156) грузъ Q подвѣшивается къ крюку обращенной внизъ обоймицы, самый же блокъ виситъ на веревкѣ, одинъ конецъ которой прикрѣпленъ къ неподвижному крюку или гвоздю, а на другой конецъ (перекидываемый часто черезъ неподвижный блокъ) дѣйствуетъ сила P. Такимъ образомъ при поднятіи груза блокъ имѣетъ поступательное и вращательное движеніе.



Фиг. 156.

Разсмотримъ сперва общій случай равновѣсія блока (фиг. 156), когда вѣтви обхватывающей его веревки образуютъ между собою нѣкоторый уголъ α. Обозначивъ натяженіе укрѣпленной части веревки черезъ F, изъ уравненія моментовъ силъ относительно оси

$PR - FR = 0$, находимъ, что $P = F$,

т.-е. *натяженія обѣихъ вѣтвей веревки одинаковы.* Сложивъ эти равныя силы по правилу параллелограмма, который въ этомъ случаѣ обращается въ ромбъ, находимъ, что равнодѣйствующая дѣлитъ уголъ α и хорду AB пополамъ, и равна $\sqrt{2P^2(1+\cos\alpha)} = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$. Такъ какъ эта сила по направленію прямо противоположна грузу Q и вѣсу G блока, то второе уравненіе равновѣсія имѣетъ слѣдующій простой видъ: $2P\cos\frac{\alpha}{2} = Q + G$, откуда

$$P = \frac{Q+G}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

Этому выраженію придаютъ и другой видъ. Замѣтивъ, что

$\angle OAB = \frac{\alpha}{2}$, находимъ, что $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{R}$, а $2\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{R}$

Поэтому

$$P = (Q + G)\frac{R}{AB}, \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

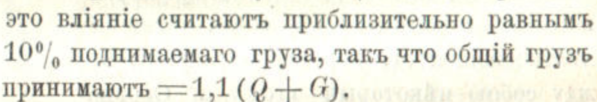
т.-е. въ подвижномъ блокѣ *движущая сила относится къ общему вѣсу груза и блока, какъ радіусъ блока къ хордѣ дуги, обхватываемой веревкой.*

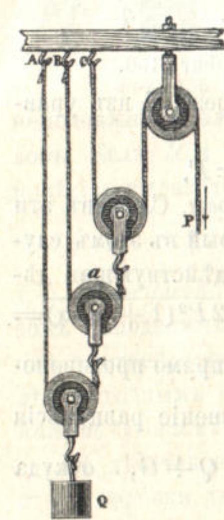
Если вѣтви веревки параллельны, то $\alpha = 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} = 1$ (или: хорда ab обращается въ діаметръ); слѣдовательно:

$$P = \frac{Q + G}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (5'')$$

т.-е. *движущая сила вдвое менѣе поднимаемаго груза.*

Сопротивленіе отъ тренія и жесткости въ подвижномъ блокѣ значительно менѣе, чѣмъ въ неподвижномъ. Не выводя здѣсь довольно сложныхъ и малоупотребительныхъ формулъ для опредѣленія вліянія этихъ сопротивленій, укажемъ, что на практикѣ это вліяніе считаютъ приблизительно равнымъ 10% поднимаемаго груза, такъ что общій грузъ принимаютъ $= 1{,}1(Q + G)$.

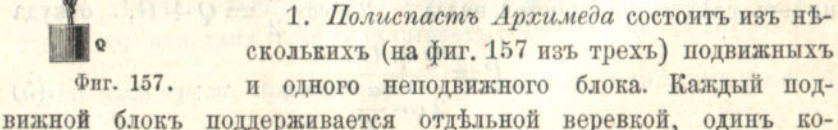




Фиг. 157.

§ 280. **Полиспасты.** При употребленіи подвижного блока съ параллельными веревками, какъ только что было выведено, отношеніе движущей силы къ поднимаемому грузу $= 1:2$. Чтобы получить еще большій выигрышъ въ силѣ, употребляютъ систему изъ нѣсколькихъ подвижныхъ блоковъ, соединенныхъ съ однимъ или нѣсколькими неподвижными блоками. Такихъ соединеній блоковъ, называемыхъ *полиспастами* или *талями*, существуетъ нѣсколько типовъ. Разсмотримъ нѣкоторые изъ нихъ.

1. *Полиспастъ Архимеда* состоитъ изъ нѣсколькихъ (на фиг. 157 изъ трехъ) подвижныхъ и одного неподвижного блока. Каждый подвижной блокъ поддерживается отдѣльной веревкой, одинъ ко-



нецъ которой укрѣпленъ неподвижно, а другой подвѣшенъ къ крюку обоймицы слѣдующаго верхняго блока. Свободный конецъ самаго верхняго подвижного блока перекинутъ черезъ неподвижной блокъ; на этотъ конецъ дѣйствуетъ сила P. Поднимаемый грузъ Q подвѣшивается на крюкъ самаго нижняго блока. Если пренебречь вѣсомъ блоковъ и вліяніемъ вредныхъ сопротивленій, то величина движущей силы P опредѣлится слѣдующимъ образомъ. Считая вѣтви веревокъ параллельными, согласно предыдущему, находимъ, что натяженіе части веревки, привязанной къ крюку обоймицы 2-го (считая снизу) блока, равно $\frac{Q}{2}$, натяженіе части веревки, привязанной къ крюку 3-го блока, равно $\frac{Q}{2.2}=\frac{Q}{2^2}$, наконецъ натяженіе свободнаго конца веревки равно $\frac{Q}{2.2^2}=\frac{Q}{2^3}$. Итакъ при 3-хъ подвижныхъ блокахъ $P=\frac{Q}{2^3}$. Очевидно, если бы подвижныхъ блоковъ было n, то сила

$$P=\frac{Q}{2^n}$$



Фиг. 158.

2. Полиспастъ, изображенный на фиг. 158, представляетъ соединеніе 3-хъ подвижныхъ и 3-хъ неподвижныхъ блоковъ. Грузъ Q подвѣшивается къ крюку нижней обоймицы, заключающей подвижные блоки; верхняя обоймица съ неподвижными блоками подвѣшивается къ неподвижному крюку. Веревка прикрѣплена къ верхней обоймицѣ и по очереди обхватываетъ всѣ блоки, такъ что число вѣтвей ея вдвое болѣе числа подвижныхъ блоковъ. На свободный конецъ веревки дѣйствуетъ движущая сила P.

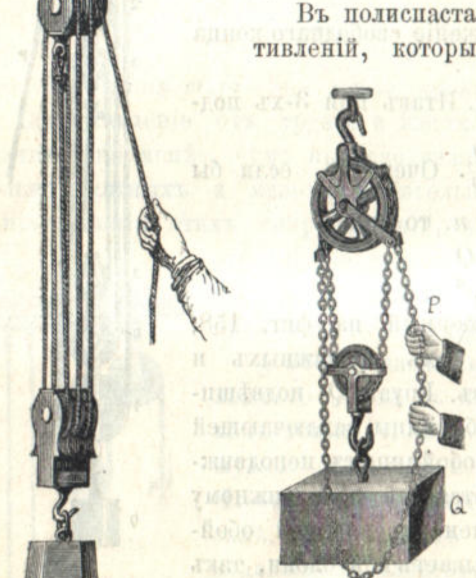
Такъ какъ грузъ Q уравновѣшивается общимъ натяженіемъ всѣхъ шести вѣтвей веревки и такъ какъ всѣ онѣ одинаково натянуты, то натяженіе каждой вѣтви, а слѣдовательно и свободнаго конца веревки равно $\frac{Q}{6}=\frac{Q}{2.3}$. Итакъ, для равновѣсія въ

этомъ полиспастѣ необходимо и достаточно, чтобы сила $P = \frac{Q}{2.3}$.

Очевидно, что при n подвижныхъ блокахъ $P = \frac{Q}{2n}$, т.-е. *движущая сила равна грузу, раздѣленному на удвоенное число подвижныхъ блоковъ.*

3. Полиспастъ, изображенный на фиг. 159, отличается отъ предыдущаго только тѣмъ, что всѣ подвижные блоки посажены въ одной коробкѣ на одну общую ось, точно также какъ и всѣ неподвижные блоки. Отношеніе движущей силы къ поднимаемому грузу остается такое же, какъ и въ предыдущемъ полиспастѣ.

Въ полиспастахъ вліяніе вредныхъ сопротивленій, которыя мы не принимали въ разсчетъ, очень велико: оно доходитъ отъ $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$ поднимаемаго груза и даже болѣе. Поэтому въ двухъ послѣднихъ полиспастахъ не ставятъ болѣе трехъ паръ блоковъ.



Фиг. 159. Фиг. 160.

§ 281. Дифференціальный цѣпной блокъ Вестона (фиг. 160) состоитъ изъ двухъ различнаго діаметра блоковъ, составляющихъ одно цѣлое и укрѣпленныхъ въ неподвижной обоймицѣ и одного подвижного блока, къ крюку котораго подвѣшивается поднимаемый грузъ. Жолоба блоковъ имѣютъ выступы, захватывающіе звенья огибающей ихъ цѣпи для предупрежденія ея скольженія. Безконечная цѣпь обхватываетъ, какъ видно изъ рисунка, всѣ блоки такимъ образомъ, что если потянуть внизъ за тотъ конецъ свободной петли цѣпи, который идетъ съ бо́льшаго неподвижнаго

блока, то цѣпь будетъ навиваться на большій блокъ и свиваться съ меньшаго неподвижнаго блока, вслѣдствіе чего грузъ станетъ подниматься. При одномъ полномъ оборотѣ неподвижныхъ блоковъ длина пути, пройденнаго цѣпью на большемъ блокѣ, равна $2\pi R$, а на меньшемъ $2\pi r$. Разность этихъ величинъ $2\pi\ (R-r)$, очевидно, равна уменьшенію длины обѣихъ вѣтвей, поддерживающихъ подвижной блокъ; слѣдовательно, уменьшеніе длины одной вѣтви цѣпи или, что все равно, высота поднятія груза $= \pi\,(R-r)$. Обозначивъ движущую силу черезъ P, а грузъ черезъ Q, по теоремѣ работъ имѣемъ

$$P\,.\,2\pi R = Q\,\pi\,(R-r),\ \text{откуда} \qquad P = \frac{R-r}{2R}\,Q.$$

Отношеніе радіусовъ неподвижныхъ блоковъ $\frac{r}{R}$ дѣлается отъ $\frac{7}{8}$ до $\frac{14}{15}$, такъ что движущая сила составляетъ отъ $\frac{1}{16}$ до $\frac{1}{30}$ поднимаемаго груза.

Опыты показали, что въ этомъ блокѣ работа, затрачиваемая на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій почти въ $1\frac{1}{2}$ раза болѣе работы поднимаемаго (или опускаемаго) груза. Поэтому грузъ, поднятый на блокѣ Вестона, остается висѣть на той же высотѣ и послѣ прекращенія дѣйствія движущей силы, такъ что для спуска его надо потянуть за другую вѣтвь свободной петли.

Иногда на эту петлю подвѣшивается второй подвижной блокъ. Когда грузъ поднимется, а петля опустится, то освобождаютъ верхній блокъ и нагружаютъ нижній. Затѣмъ, давая блоку обратный ходъ, поднимаютъ второй блокъ съ грузомъ и т. д.

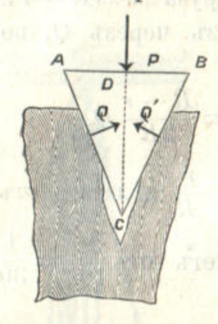
Клинъ.

§ 282. **Клинъ** (фиг. 161) обыкновенно имѣетъ видъ треугольной призмы, у которой одинъ изъ двугранныхъ угловъ значительно острѣе двухъ другихъ. Уголъ этотъ называется *угломъ заостренія*. Грань AB, противолежащая этому углу, называется *головой* клина, а двѣ другія грани AC и BC—*боками* или *щеками* клина; ребро C клина, противолежащее его головѣ, называется *остріемъ* или *лезвіемъ*. Фиг. 161 изображаетъ разрѣзъ равнобочнаго клина плоскостью, перпендикулярной къ его острію. Такой клинъ

можно разсматривать, какъ двѣ наклонныя плоскости, соединенныя своими основаніями.

Клинъ составляетъ необходимую часть всѣхъ колющихъ и рѣжущихъ инструментовъ (топоры, ножи, рѣзцы и проч.), употребляется часто для скрѣпленія частей машинъ, а также и для сжатія тѣлъ (клиновой прессъ).

Разсмотримъ условія равновѣсія равнобочнаго клина съ угломъ заостренія $= 2\alpha$. Положимъ, что мы желаемъ расколоть дерево равномѣрнымъ движеніемъ клина силою P, приложенной перпендикулярно къ его головѣ AB. Появившіяся при этомъ нормальныя сопротивленія Q и Q' будутъ направлены перпендикулярно къ щекамъ AC и BC клина. Допустивъ, что всѣ приложенныя силы дѣйствуютъ въ одной плоскости и что клинъ имѣетъ только одно поступательное движеніе, заключаемъ, что для равновѣсія клина необходимо, чтобы проекціи всѣхъ приложенныхъ къ нему силъ на направленіе движенія были равны нулю, т.-е. чтобы



Фиг. 161.

$$P - Q\sin\alpha - Q'\sin\alpha = 0, \text{ откуда } P = (Q + Q')\sin\alpha \text{ или}$$

$$P = \frac{Q + Q'}{2} \cdot \frac{AB}{AC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

т.-е. *движущая сила такъ относится къ полусуммѣ сопротивленій, какъ ширина головы клина къ длинѣ щеки.*

Если принять во вниманіе сопротивленія отъ тренія fQ и fQ', дѣйствующія вверхъ вдоль щекъ клина, то получимъ уравненіе

$$P - (Q + Q')\sin\alpha - f(Q + Q')\cos\alpha = 0, \text{ откуда}$$

$$P = (Q + Q')(\sin\alpha + f\cos\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Если клинъ уже сидитъ въ деревѣ и надо опредѣлить силу, которая была бы достаточна, чтобы удержать его въ томъ же положеніи, то, замѣтивъ, что сопротивленія Q и Q' стремятся его вытолкнуть, а силы тренія fQ и fQ' препятствуютъ этому, получимъ слѣдующее уравненіе равновѣсія

$$P = (Q + Q')(\sin\alpha - f\cos\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

При $P = 0$, находимъ, что $\sin\alpha = f\cos\alpha$ или $\tan\alpha = f = \tan\varphi$ откуда $\alpha = \varphi$, т.-е. находящійся въ тѣлѣ клинъ, предоставленный самому себѣ, не можетъ быть вытолкнутъ никакими боковыми да-

вленіями Q и Q' и удержится на мѣстѣ силами тренія, если *половина его угла заостренія равна (или менѣе) угла тренія его щеки.*

Треніе въ клинѣ представляетъ весьма значительную величину, превышающую силу P, вычисленную по формулѣ (a) въ 3 и болѣе разъ. Тонкій плотничій топоръ легко входитъ въ дерево, но сильно вязнетъ въ немъ, такъ что для раскалыванія дровъ употребляютъ тяжелый топоръ (*колунъ*) съ гораздо бóльшимъ угломъ заостренія.

Винтъ.

§ 283. **Винтъ и гайка.** Извѣстно, что если развернемъ поверхность круглаго цилиндра въ плоскость, раздѣлимъ полученный прямоугольникъ прямыми, параллельными основанію, на нѣсколько равныхъ прямоугольниковъ и проведемъ ихъ діагонали, то, навернувъ обратно прямоугольникъ на цилиндръ, увидимъ, что эти діагонали (или гипотенузы прямоугольныхъ треугольниковъ) образуютъ на цилиндрѣ такъ называемую *винтовую линію* (§ 70). Какъ видно изъ образованія винтовой линіи, всѣ элементы ея наклонены къ основанію цилиндра подъ однимъ и тѣмъ же угломъ α, называемымъ *угломъ наклона* винтовой линіи, равнымъ углу между гипотенузой и основаніемъ прямоугольнаго треугольника. Представимъ, что по поверхности цилиндра движется, опираясь на нее своимъ основаніемъ, небольшой прямоугольникъ такъ, что плоскость его постоянно проходитъ черезъ ось цилиндра, а одна изъ вершинъ описываетъ винтовую линію. При такомъ движеніи прямоугольникъ произведетъ особое тѣло, называемое *прямоугольной винтовой нарѣзкой*. Цилиндръ, снабженный такой нарѣзкой, называется *винтомъ* съ прямоугольной нарѣзкой, (фиг. 162).



Фиг. 162.

Если вмѣсто прямоугольника заставимъ двигаться по поверхности цилиндра такимъ же образомъ равнобедренный треугольникъ, то получимъ *винтъ съ острой* или *треугольной нарѣзкой* (фиг. 163). Принадлежность всякаго винта есть его *гайка*, представляющая призматическое тѣло съ цилиндрическимъ отверстіемъ, на внутренней поверхности кото-

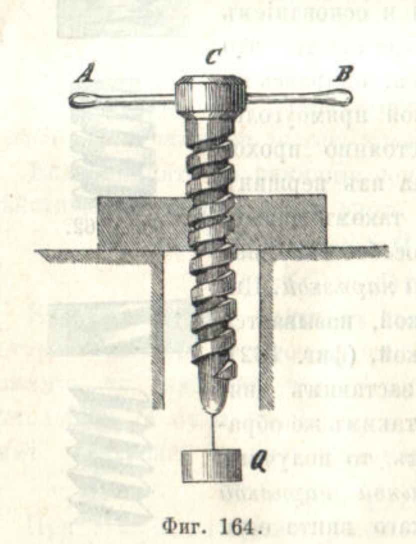




Фиг. 163.

раго имѣется совершенно такая же, но только вогнутая прямоугольная или треугольная нарѣзка. Винтъ, входя въ гайку, движется въ ней какъ по наклонной плоскости и, если гайка неподвижна, то имѣетъ поступательное и вращательное движеніе. При одномъ полномъ оборотѣ вокругъ своей оси винтъ подвигается вдоль оси на величину h своего *хода*, равнаго ширинѣ нарѣзки. Точно такое же двоякое движеніе имѣетъ и гайка на неподвижномъ винтѣ. Если винтъ, опираясь своимъ концомъ на неподвижное тѣло, имѣетъ только одно вращательное движеніе, а гайка, будучи соединена съ другимъ несвободнымъ тѣломъ, не можетъ вращаться, то она будетъ двигаться *поступательно* вдоль винта. Такимъ образомъ напр., движется суппортъ токарнаго станка. Наконецъ, если гайка, составляя одно цѣлое съ нѣкоторымъ несвободнымъ тѣломъ, имѣетъ одно вращательное движеніе, а винтъ, будучи также несвободнымъ, не можетъ вращаться съ ней, то онъ будетъ имѣть одно прямолинейное поступательное движеніе вдоль своей оси.

Винты имѣютъ самыя разнообразныя примѣненія: они служатъ прекраснымъ средствомъ для плавной передачи силы и преобразованія движеній (червячная передача), для подъема тяжестей, для сжатія тѣлъ (въ прессахъ). Во всѣхъ этихъ случаяхъ употребляются исключительно винты съ прямоугольной нарѣзкой. Винты съ острой или треугольной нарѣзкой употребляются вслѣдствіе значительнаго развивающагося въ нихъ тренія преимущественно для соединенія частей. Такіе винты обыкновенно снабжаются головкой и называются тогда *болтами*.

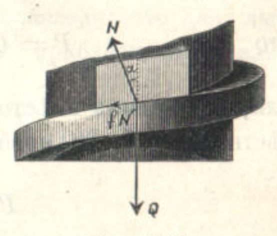


Фиг. 164.

§ 284. Положимъ, что, вращая винтъ съ прямоугольной нарѣзкой, заключенный въ неподвижной гайкѣ, мы равномѣрно поднимаемъ грузъ Q (фиг. 164). Такъ какъ винтъ имѣетъ поступательное и вращательное движеніе, то для равновѣсія его необходимо: *а*) чтобы алгебр. сумма проекцій

всѣхъ дѣйствующихъ на него силъ на вертикальную ось была равна нулю и *b*) чтобы алгебр. сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ относительно той же оси была равна нулю.

На винтъ дѣйствуютъ слѣдующія силы: 1) *движущая сила* P, дѣйствующая въ плоскости, перпендикулярной къ оси винта, и приложенная обыкновенно къ рукояткѣ, ключу или колесу, укрѣпленнымъ на концѣ винта; разстояніе точки приложенія силы P отъ оси обозначимъ черезъ R; 2) *грузъ* Q (сопротивленіе), дѣйствующій по оси винта, и 3) *нормальныя сопротивленія* N_1, N_2, N_3... (фиг. 165) элементовъ нарѣзки гайки, по которымъ движется нарѣзка винта. Эти сопротивленія, составляющія съ осью винта уголъ α, равный углу наклона винта, можно считать равномѣрно распредѣленными по всей поверхности соприкосновенія обѣихъ нарѣзокъ или сосредоточенными на *средней винтовой линіи* нарѣзки, радіусъ которой $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, т.-е. средняя ариѳметическая наружнаго (r_1) и внутренняго (r_2) радіусовъ винта. Обозначивъ черезъ ΣN сумму этихъ нормальныхъ сопротивленій, получимъ слѣдующія два уравненія равновѣсія:



Фиг. 165.

$$Q - \cos\alpha\,\Sigma N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$PR - r.\sin\alpha\,\Sigma N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій ΣN, найдемъ

$$PR = Q\,tang\alpha\,.\,r, \text{ откуда } P = Q\frac{r}{R}\,tang\alpha, \qquad (c)$$

или, замѣтивъ *), что $tang\alpha = \frac{h}{2\pi r}$, $\quad P = Q\frac{h}{2\pi R}$, $\qquad (c')$

т.-е. *движущая сила относится къ сопротивленію, какъ ходъ винта къ окружности, описанной концомъ его рукоятки.*

§ 285. Формулы (c) и (c') имѣютъ только теоретическое значеніе, такъ какъ при выводѣ ихъ не были приняты во вниманіе силы тренія $f\Sigma N$, имѣющія здѣсь большое значеніе. Мы будемъ считать ихъ направленными по средней винтовой линіи, т.-е.

*) При разверткѣ средней винтовой линіи, она представляетъ гипотенузу прямоуг. Δ-ка, катеты котораго будутъ h и $2\pi r$.

образующими уголъ α наклона къ горизонту. Введя эти силы въ уравненія равновѣсія, получимъ

$$Q - \cos\alpha \,.\, \Sigma N + \sin\alpha f \,.\, \Sigma N = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (a')$$

$$PR - r \sin\alpha\, \Sigma N - r \cos\alpha\, f \Sigma N = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b')$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій $\Sigma N = \frac{Q}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$, найдемъ,

что $$P = Q\frac{r}{R} \cdot \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (d)$$

или, подставивъ вмѣсто f равную ему величину $tang\varphi$, послѣ извѣстныхъ (стр. 38) преобразованій, окончательно получимъ

$$P = Q\frac{r}{R}\, tang(\alpha + \varphi) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (e)$$

Формула (d) представляетъ величину силы, необходимой и достаточной для *равномѣрнаго поднятія* груза. Если слѣдуетъ опредѣлить силу, удерживающую винтъ, а слѣдовательно и грузъ въ *покоѣ*, то, замѣтивъ, что въ этомъ случаѣ силы тренія $f\Sigma N$ будутъ имѣть обратное направленіе, получимъ, что

$$P = Q\frac{r}{R} \cdot \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (d') \text{ или}$$

$$P = Q\frac{r}{R}\, tang\,(\alpha - \varphi) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (e')$$

Формуламъ (d) и (d') часто даютъ чисто алгебраическій видъ, болѣе удобный для вычисленій. Раздѣливъ числителя и знаменателя на $\cos\alpha$ изъ (d) находимъ

$$P = Q\frac{r}{R} \cdot \frac{tang\alpha + f}{1 - f \,.\, tang\alpha}$$

или подставивъ вмѣсто $tang\alpha$ его величину $\frac{h}{2\pi r}$, послѣ преобразованій получимъ:

$$P = Q\frac{r}{R} \cdot \frac{h + f \,.\, 2\pi r}{2\pi r - fh.}$$

Изъ формулы (e') видно, что, при $\alpha = \varphi$ (или, при $\alpha < \varphi$), сила $P = 0$, т.-е. винтъ будетъ держаться на своемъ мѣстѣ исключи-

тельно силой своего тренія о гайку, *если уголъ наклона равенъ или менѣе угла тренія.* Въ металлическихъ винтахъ коэффиціентъ тренія $f = 0{,}18$ (безъ смазки) и $f = 0{,}1$ (со смазкой), что соотвѣтствуетъ угламъ тренія $\varphi = 10^0 10'$ или $\varphi = 5^0 50'$. Уголъ же α наклона желѣзныхъ винтовъ дѣлается всегда меньше, а именно отъ $2^0 20'$ до $4^0 20'$, такъ что винтъ самъ выходитъ изъ гайки не можетъ. Это полезное обстоятельство имѣетъ однако и свою невыгодную сторону, такъ какъ вычисленія показали, что для выгоднѣйшей передачи силы уголъ α долженъ приблизительно равняться $42\frac{1}{2}^0$.

Задачи.

Динамика точки.

10. Механическая работа.

218. Сколько кирпичей можетъ поднять рабочій въ 6 часовъ на высоту 20 футовъ при помощи веревки и блока, предполагая, что кирпичъ вѣситъ 8 фунтовъ и что человѣкъ, работающій такимъ образомъ, совершаетъ 1560 фунто-футовъ работы въ минуту.

219. Каменщикъ, положивъ въ ведро 20 кирпичей, по 7 фунтовъ каждый, поднимается по лѣстницѣ на высоту 30 футовъ. Если вѣсъ каменщика съ ведромъ равенъ 160 фунтамъ, опредѣлить совершаемую имъ при подъемѣ работу. Найти, сколько кирпичей онъ успѣетъ перенести въ день, если дневная работа его равна 1350000 фунто-футовъ.

220. Если человѣкъ въ 9-тичасовой рабочій день можетъ совершить 126000 кг.-м. работы, то сколько процентовъ лошадиной силы представляетъ его средняя сила?

221. Опредѣлить работу въ пудо-футахъ, производимую тѣломъ при свободномъ паденіи его въ теченіе t секундъ. Вѣсъ тѣла равенъ P пуд.

222. Найти число лошадиныхъ силъ паровой машины, которая могла бы двигаться со скоростью 45 килом. въ часъ, если вѣсъ паровой машины и груза равенъ 50 тоннамъ, а сопротивленіе=18 килогр. на тонну.

223. Найти число лошадиныхъ силъ паровой машины паровоза, двигающагося со скоростью 30 килом. въ часъ вверхъ по уклону

въ 1 : 100. Вѣсъ паровоза 42 тонны; сопротивленіе отъ тренія 14 килогр. на тонну.

224. Зная, что человѣкъ, работая на лебедкѣ, можетъ совершить 300 кг.-м. въ минуту, опредѣлить, сколько кубическихъ метровъ воды можетъ онъ поднять на высоту 12 метр. въ 8 часовъ. Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія лебедки 0,6.

225. Опредѣлить число лошадиныхъ силъ паровой машины, поднимающей по 8 куб. метр. воды въ минуту изъ шахты, глубиною въ 36 метровъ.

226. Извѣстно, что человѣкъ, работая на воротѣ, можетъ производить 70 пудо-фут. въ минуту въ теченіе 8-мичасового рабочаго дня; если же онъ будетъ поднимать грузъ вверхъ по лѣстницѣ, то будетъ производить только 25 пудо-фут. въ минуту. Опредѣлить, сколько въ томъ и въ другомъ случаѣ потребуется времени для поднятія 300 пуд. на высоту 20 саженъ.

227. Копаютъ колодецъ въ 20 фут. глубины и 4 фута въ діаметрѣ. Опредѣлить число пудо-футовъ работы, израсходованной на поднятіе выкопанной земли, зная, что 1 куб. футъ земли вѣситъ 3 пуда и считая, что центръ тяжести удаляемой изъ колодца земли лежитъ на глубинѣ 10 футовъ.

228. Опредѣлить, сколько пудо-футовъ работы надо затратить, чтобы поднять съ земли камни для возведенія колонны въ 50 фут. высоты и 10 квадр. фут. поперечнаго сѣченія, считая вѣсъ 1 куб. фута камня 4 пуда и среднюю высоту подъема = половинѣ высоты колонны.

229. Найти число лошадиныхъ силъ полезной работы водяного колеса, если рѣка имѣетъ 3 м. ширины, 1,25 м. глубины и течетъ со скоростью 8 м. въ минуту. Высота паденія воды = 2 м., а коэффиціентъ полезнаго дѣйствія колеса 0,6.

230. Опредѣлить, какой запасъ работы находится въ бакѣ, наполненномъ водой, если бакъ стоитъ на высотѣ 3 метровъ надъ землей и имѣетъ 5 м. длины, 2 м. ширины, 1 м. глубины.

231. Шахта, имѣющая h футовъ глубины, полна водой. Требуется опредѣлить, на какой глубинѣ будетъ стоять вода, когда одна четвертая часть всей работы по выкачиванію воды изъ шахты будетъ совершена.

232. Грузъ въ 20 пудовъ поднятъ съ глубины 600 футовъ при помощи каната, каждый футъ котораго вѣситъ 1 фунтъ. Опредѣлить число пудо-футовъ израсходованной при этомъ работы.

233. Найти работу пѣшехода, прошедшаго по горизонтальному пути 1 версту, если длина его шага $=2$ фут., и при каждомъ шагѣ онъ поднимаетъ собственный вѣсъ, равный 4,8 пуда на высоту 1,5 дюйма.

234. На сколько саженъ поднимется вверхъ по вертикальной лѣстницѣ этотъ человѣкъ (зад. 233), если при подъемѣ онъ произведетъ такую же точно работу.

235. Паровая машина поднимаетъ въ минуту 3 куб. м. воды съ глубины 250 м. Опредѣлить, сколько тоннъ угля потребуется для топки котла въ теченіе 24 часовъ, если машина на каждый килогр. угля развиваетъ 80000 кг.-м. работы.

236. Опредѣлить работу трехъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ въ 3, 4 и 12 пуд., которыя двигаютъ точку на протяженіи 100 фут. по направленію, образующему съ равнодѣйствующей уголъ въ 60^0 (въ 30^0; въ 45^0)?

237. Перемѣнная сила дѣйствуетъ на точку на протяженіи 3 футовъ. Измѣренія этой силы въ семи равноотстоящихъ одна отъ другой точкахъ, считая съ начальной, дали слѣдующія величины въ фунтахъ: 189; 151,2; 126; 108; 94,5; 84; 75,6. Опредѣлить общее количество произведенной работы.

238. Опредѣлить работу (въ лошадиныхъ силахъ) силы, касательной къ окружности колеса, діаметръ котораго $d=2,5$ м., если колесо дѣлаетъ $n=45$ оборотовъ въ минуту, а величина силы $F=200$ клгр.

239. Насосъ поднимаетъ 2,5 ведра воды на высоту 4 саженъ и дѣлаетъ въ минуту 36 качаній. Найти мощность насоса.

240. Паровой молотъ, вѣсомъ въ 1,5 тонны, падая съ высоты 0,5 м., дѣлаетъ 72 удара въ минуту. Найти работу молота за одинъ ударъ, а также мощность молота.

241. Найти работу паровой машины, если площадь поршня $F=500$ кв. см., среднее давленіе на поршень $p=2$ атмосферы, средняя скорость поршня $v=1,5$ м. въ секунду.

242. Опредѣлить работу паровой машины: a) за одинъ ходъ поршня; b) въ 1 секунду, если діаметръ парового цилиндра d; длина хода поршня l; число оборотовъ вала въ минуту n; рабочее давленіе, равное манометрическому безъ противодѣйствія мятаго пара, p.

Числовой примѣръ. $d=0,48$ м.; $l=1$ м.; $n=45$; $p=5$ атмосферъ.

243. Вычислить давленіе на зубецъ колеса, діаметръ котораго d, если валъ передаетъ N лошадиныхъ силъ, дѣлая n оборотовъ въ минуту.

Числовой примѣръ. $d = 2$ м.; $N = 10$; $n = 48$.

244. Опредѣлить силу тяги паровоза за одинъ оборотъ ведущаго колеса по слѣдующимъ даннымъ: діаметръ цилиндра каждой изъ двухъ одновременно работающихъ паровыхъ машинъ его d, длина хода поршня l, среднее полезное давленіе p атмосферъ, діаметръ ведущаго колеса, на которое передается 0,8 всей работы пара, D.

11. Уравненія движенія.

245. Какая сила можетъ въ 2,5 сек. сообщить тѣлу вѣсомъ въ 490 килогр. скорость въ 10 метр.?

246. Свободно падающее тѣло по прошествіи нѣкотораго времени получило опредѣленное количество движенія. Во сколько разъ возрастетъ это количество движенія, если время паденія тѣла увеличится вдвое?

247. Какую силу надо приложить къ тѣлу вѣсомъ въ 20 фунтовъ, движущемуся со скоростью въ 50 футовъ, чтобы въ 5 сек. уменьшить его скорость до 10 футовъ?

248. Въ какое время сила въ 1 килогр. сообщитъ тѣлу вѣсомъ въ 35 килогр. скорость въ 7 метр.? Какая сила сообщитъ въ то же время и тому же тѣлу скорость въ 21 метръ?

249. Пуля, выпущенная изъ ружья вертикально вверхъ, достигла извѣстной высоты h. Опредѣлить высоту, на которую поднимется при томъ же зарядѣ пороха пуля, вѣсъ которой будетъ вдвое болѣе.

250. Гребцы сообщаютъ лодкѣ съ пассажирами, вѣсящей 30 пудовъ, скорость 3 версты въ часъ. Какую скорость въ 1 минуту будетъ имѣть при тѣхъ же условіяхъ лодка, если къ ней привязать еще барку съ грузомъ, вѣсящую 220 пудовъ?

251. Поѣздъ, состоящій изъ паровоза въ 3000 пудовъ и 10 груженыхъ вагоновъ по 900 пудовъ, движется со скоростью 24 версты въ часъ. Какую силу надо приложить къ паровозу, чтобы остановить его на протяженіи 100 саженъ?

252. Какую работу (въ лошадиныхъ силахъ) можетъ произвести тѣло вѣсомъ въ 7,5 пуд., движущееся равномѣрно со скоростью 64 фута въ секунду?

253. Опредѣлить полезную работу пожарной машины, если она выбрасываетъ 16 фунтовъ воды со скоростью 50 фут. въ секунду.

254. Сколько кубич. метровъ воды можетъ поднять въ 1 часъ паровая машина въ 50 лошадиныхъ силъ изъ шахты глубиною въ 45 метровъ?

255. Опредѣлить работу пороховыхъ газовъ, сообщающихъ 8-мифунтовому ядру скорость въ 200 саженъ.

256. Тѣло вѣсомъ въ 245 килогр. измѣнило свою скорость съ 6 до 9,6 метр. Опредѣлить величину затраченной при этомъ работы.

257. Тѣло вѣсомъ въ 250 килогр. движется вслѣдствіе дѣйствія на него постоянной силы въ 15 килогр. въ теченіе 5 секундъ. Найти работу этой силы.

258. Какую силу слѣдуетъ приложить къ тѣлу вѣсомъ въ $P=48$ пудовъ, двигающемуся со скоростью $v=12$ футовъ, чтобы остановить его въ 10 секундъ? Какой путь пройдетъ это тѣло до остановки?

259. Опредѣлить живую силу вагона вѣсомъ въ 900 пудовъ, движущагося со скоростью 24 версты въ часъ. Какую силу надо приложить, чтобы остановить его на протяженіи 125 саж.?

260. Изъ ружья вѣсомъ въ 12 фунтовъ вылетѣла пуля вѣсомъ въ 6 золотниковъ со скоростью 960 футовъ. Найти, во сколько разъ живая сила пули при выходѣ изъ ружья болѣе живой силы ружья.

261. Пуля вылетѣла изъ ружья со скоростью въ 350 метр. Найти работу въ килограммо-метрахъ и давленіе въ атмосферахъ пороховыхъ газовъ, если вѣсъ пули равенъ 24 грам., а площадь поперечнаго сѣченія ея 200 кв. миллиметровъ.

262. 16-тифунтовое ядро ударилось въ стѣну со скоростью 400 футовъ и вошло въ нее на глубину 2 футовъ. Опредѣлить силу сопротивленія стѣны и время движенія въ ней ядра.

263. Тѣло въ $P=20$ фунт. должно подняться вверхъ на $h=2$ саж., при чемъ въ концѣ поднятія скорость его должна быть равна $v=8$ фут. Опредѣлить величину работы, которую надо при этомъ затратить.

264. Опредѣлить живую силу обода маховика, дѣлающаго n оборотовъ въ минуту, если вѣсъ обода P пудовъ можно считать сосредоточеннымъ на окружности радіуса r.

Примѣръ. $P = 192$ пуда; $n = 45$; $r = 8$ футовъ.

265. Паровозъ вѣсомъ въ 4200 пудовъ по прекращеніи дѣйствія пара уменьшилъ на протяженіи полверсты свою скорость съ 25 фут. до 9 фут. въ секунду. Опредѣлить сопротивленіе паровоза движенію.

266. Какой путь пройдетъ этотъ паровозъ до полной остановки?

267. Паровозъ въ P тоннъ, выйдя со станціи, пріобрѣтаетъ въ теченіе t секундъ и на протяженіи s метровъ постоянную скорость v метровъ. Если сопротивленіе паровоза движенію принять равнымъ $\frac{1}{200}$ его вѣса, то опредѣлить: 1^0, работу въ секунду паровоза на этомъ пути; 2^0, работу въ секунду на дальнѣйшемъ пути.

Примѣръ. $P = 30$ тоннъ; $t = 1$ мин. 10 сек.; $s = 240$ метр.; $v = 14$ метр.

268. Два тѣла, изъ которыхъ одно вѣситъ P килогр., а другое p килогр., двигаются равномѣрно по одному и тому же направленію. Скорость перваго тѣла V м., а второго v м. Разсматривая оба тѣла какъ *одну общую систему*, опредѣлить, съ какой скоростью движется центръ тяжести этой системы.

Примѣръ. $P = 8$; $p = 4$; $V = 8$; $v = 2$.

269. Два одинаковыя тѣла двигаются равномѣрно, одновременно выходя изъ одной и той же точки въ перпендикулярныхъ другъ къ другу направленіяхъ. Скорость перваго тѣла $V = 8$ м., скорость второго $v = 6$ м. Опредѣлить скорость движенія центра тяжести этой системы.

270. Въ машинѣ Атвуда болѣе тяжелый грузъ равенъ P золотниковъ, а болѣе легкій p золотн. Опредѣлить скорость падающаго груза черезъ t минутъ послѣ начала паденія. Если затѣмъ мгновенно перерѣзать шнурокъ, то черезъ сколько времени поднимающійся грузъ остановится на одно мгновеніе?

Примѣръ. $P = 4{,}25$; $p = 3{,}75$; $t = 0{,}25$.

271. Найти отношеніе грузовъ въ машинѣ Атвуда, при которомъ болѣе тяжелое тѣло будетъ проходить a) 1 футъ; b) 1 дюймъ въ первую секунду.

272. Показать, что если отношеніе грузовъ въ машинѣ Атвуда $p_1 : p_2 = n : (n + 2)$, то отношеніе скорости падающаго на ней груза къ скорости свободно падающаго тѣла $v_1 : v = \frac{1}{n+1}$.

Примѣръ. При $p_1 : p_2 = 3 : 5$, $v_1 : v = \frac{1}{4}$. При $p_1 : p_2 = 4 : 6$; $v_1 : v = \frac{1}{5}$.

273. Опредѣлить скорость движенія общаго центра тяжести поднимающагося и падающаго груза въ машинѣ Атвуда черезъ t секундъ послѣ начала движенія. Вѣсъ падающаго груза P грам., а поднимающагося p грам.

274. Тѣло брошено со скоростью $v = 3\ g$. подъ угломъ $\alpha = 75^0$ къ горизонту. Опредѣлить дальность его полета.

275. Если наклонно брошенное тѣло въ самой высокой точкѣ своего пути измѣнитъ свою скорость, не измѣняя направленія движенія, то измѣнится ли время паденія этого тѣла?

276. Тѣло брошено со скоростью v подъ угломъ α къ горизонту. Опредѣлить скорость, съ которой надо было бросить одновременно съ нимъ, но вертикально вверхъ, другое тѣло, чтобы оба тѣла упали обратно на землю въ одинъ и тотъ же моментъ.

277. Изъ одной и той же точки выпущены 3 ядра со скоростью 400 фут. и подъ углами въ 30^0, 45^0, 60^0 къ горизонту. Опредѣлить для каждаго ядра время, высоту и дальность полета и сравнить ихъ между собою.

278. Дальность полета тѣла, брошеннаго наклонно къ горизонту, равно n метр. Время его движенія $= t$ сек. Опредѣлить величину и направленіе его начальной скорости.

279. Изъ пушки, находящейся на броненосцѣ, выпущенъ снарядъ со скоростью v подъ угломъ α къ горизонту. Въ это время броненосецъ двигался отъ цѣли со скоростью v' въ одной вертикальной плоскости съ движеніемъ снаряда. Опредѣлить разстояніе отъ мѣста, гдѣ упалъ снарядъ, до броненосца въ моментъ паденія

280. Два тѣла брошены одновременно изъ одной и той же точки наклонно къ горизонту. Начальныя скорости тѣлъ v и v', а углы, подъ которыми они брошены къ горизонту, α и β. Опредѣлить разстояніе между ними въ концѣ времени t, если оба тѣла двигались въ одной плоскости.

281. Тѣло брошено со скоростью v подъ угломъ α къ горизонту Опредѣлить его разстояніе отъ точки отправленія въ концѣ времени t.

282. Ядро, выпущенное изъ пушки со скоростью v подъ угломъ α къ горизонту, перелетѣло черезъ вертикальную стѣну, видную изъ точки бросанія подъ угломъ β къ горизонту, едва коснувшись верхняго края ея. Опредѣлить, спустя сколько секундъ послѣ выстрѣла ядро перелетало надъ стѣной.

283. Опредѣлить разстояніе отъ стѣны до мѣста, гдѣ упало это ядро.

12. Несвободное прямолинейное движеніе.

284. Тѣло вѣсомъ въ $P = 50$ килогр. лежитъ на горизонтальной плоскости. Чтобы его сдвинуть съ мѣста, нужно приложить силу не менѣе, чѣмъ въ $F = 10$ килогр. Опредѣлить коэффиціентъ тренія. Если предположить, что къ этому самому тѣлу приложена сила въ $F' = 20$ килогр., направленная вертикально вверхъ, то какая горизонтальная сила будетъ достаточна для передвиженія тѣла.

285. Къ тѣлу A, лежащему на столѣ, привязано шнуркомъ тѣло B, висящее въ воздухѣ. Шнурокъ перекинутъ черезъ блокъ, укрѣпленный на краю стола. Опредѣлить скорость тѣла A, спустя t секундъ послѣ начала движенія: 1^0, не принимая во вниманіе тренія; 2^0, принимая его во вниманіе. Вѣса тѣлъ A и B: $p_1 = 4$ ф. и $p_2 = 6$ ф.; $t = 10$ сек.; $f = 0{,}35$.

286. Рѣшить задачу 285, предполагая, что оба тѣла одинаковаго вѣса.

287. Какой вѣсъ должно имѣть тѣло B, чтобы тѣло A (зад. 285), вѣсящее $p_1 = 4$ ф., двигалось равномѣрно, принимая во вниманіе треніе.

288. Тяжелое тѣло A виситъ вертикально и тянетъ за собой при помощи шнурка, перекинутаго черезъ блокъ, другое тѣло B, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости. Вѣсъ тѣла A — p грам., а тѣла B — p' грам. Опредѣлить (не принимая во вниманіе тренія) горизонтальную и вертикальную скорость общаго центра тяжести обоихъ тѣлъ въ концѣ промежутка времени t.

289. Тѣлу, лежавшему на горизонтальной плоскости, сообщена толчкомъ нѣкоторая начальная скорость вдоль плоскости. Пройдя

путь $s = 3{,}6$ м., тѣло остановилось вслѣдствіе тренія. Найти его начальную скорость и время его движенія, если коэффиціентъ тренія $f = 0{,}25$.

290. Тѣло начало двигаться по горизонтальной плоскости съ начальной скоростью $v = 8$ ф. и черезъ $t = 5$ секундъ остановилось вслѣдствіе сопротивленія отъ тренія. Опредѣлить разстояніе, пройденное тѣломъ, и коэффиціентъ тренія.

291. Сани съ желѣзными подрѣзами вмѣстѣ съ грузомъ вѣсятъ $P = 200$ килогр. Опредѣлить наименьшую силу, достаточную, чтобы вести сани по льду, если движущая сила образуетъ уголъ $\alpha = 30^{0}$ съ горизонтомъ, а коэффиціентъ тренія по льду $f = 0{,}06$.

292. *) На наклонной плоскости ABC, длина которой AB, а основаніе AC, грузъ въ $P = 5$ килогр. удерживается въ равновѣсіи силой $F = 3$ килогр. Найти, какой грузъ можетъ удерживать та же сила на наклонной плоскости, у которой AC будетъ высотой, а BC—основаніемъ.

293. Доказать, что если высота наклонной плоскости равна 1 футу, то число секундъ, въ которое тѣло спускается съ наклонной плоскости, равно одной четверти числа футовъ длины этой плоскости.

294. Опредѣлить натяженіе каната, который тянетъ вагонъ вѣсомъ $P = 80$ пуд. вверхъ по наклону съ подъемомъ $h : l = 1 : 16$, сообщая вагону ускореніе $a = 1$ фут. въ секунду.

295. Если канатъ (зад. 294) лопнетъ черезъ $t = 0{,}5$ минуты послѣ начала движенія, то сколько времени и на какомъ протяженіи вагонъ будетъ продолжать подниматься вверхъ.

296. Грузъ въ $P = 20$ килогр. лежитъ на наклонной плоскости и удерживается шнуркомъ, одинъ конецъ котораго привязанъ къ тѣлу, а другой—къ вершинѣ наклонной плоскости. Шнурокъ обладаетъ такой крѣпостью, что можетъ выдержать только грузъ въ $\frac{1}{2} P = 10$ килогр. Уголъ наклона плоскости къ горизонту постепенно увеличивается. Найти, при какомъ углѣ наклона шнурокъ лопнетъ.

297. Если N есть нормальное давленіе на наклонную плоскость въ томъ случаѣ, когда движущая сила параллельна длинѣ

*) Въ задачахъ 292—298 треніе въ разсчетъ не принимается.

этой плоскости, а N'—нормальное давленіе въ томъ случаѣ, когда движущая сила горизонтальна, то $NN' = P^2$, гдѣ P—вѣсъ тѣла. Доказать это.

298. Длина наклонной плоскости $l=5$ м., а высота $h=3$ м. Раздѣлить на двѣ части грузъ $P=104$ килогр. такъ, чтобы одна часть, перевѣшиваясь на веревкѣ черезъ вершину наклонной плоскости, удерживала бы въ равновѣсіи другую часть, лежащую на плоскости.

299. Грузъ въ 10 килогр. держится треніемъ *предѣльно* (т.-е. при малѣйшемъ увеличеніи угла онъ соскальзываетъ) на плоскости, наклоненной къ горизонту подъ угломъ въ 30^0. Опредѣлить: 1^0, нормальное давленіе; 2^0, величину тренія; 3^0, коэффиціентъ тренія.

300. Длина наклонной плоскости $l=25$ фут., а высота $h=7$ фут. Найти, какую силу слѣдуетъ приложить параллельно длинѣ наклонной плоскости къ лежащему на ней грузу $P=50$ фунт., чтобы онъ оставался въ покоѣ. Коэффиціентъ тренія $f=0{,}25$.

301. Отношеніе основанія къ длинѣ наклонной плоскости $b:l=0{,}8$. На тѣло, лежащее на плоскости, дѣйствуютъ силой, параллельной длинѣ плоскости и равной 0,75 вѣса тѣла, причемъ оно начинаетъ двигаться вверхъ. Найти коэффиціентъ тренія.

302. Основаніе наклонной плоскости $b=24$ фут., а высота$=7$ фут. Найти скорость, пріобрѣтаемую въ 1-ю секунду тѣломъ, движущимся внизъ по наклонной плоскости, и время, употребляемое на прохожденіе всей плоскости. Коэффиціентъ тренія $f=0{,}25$.

303. Деревянный кубъ стоитъ одной изъ своихъ граней на наклонной плоскости такъ, что верхнее и нижнее ребра его основанія горизонтальны. Уголъ наклона плоскости увеличиваютъ до тѣхъ поръ, пока кубъ не начнетъ катиться, перекидываясь. Найти коэффиціентъ тренія.

304. Тяжелая доска прислонена однимъ концомъ къ гладкой, вертикальной стѣнѣ, а другимъ опирается на полъ. Опредѣлить наименьшій уголъ α, который должна составлять доска съ горизонтальной плоскостью тротуара, если она удерживается въ равновѣсіи силою тренія своего конца, опирающагося на полъ. Коэффиціентъ тренія f.

305. Тяжелый брусъ лежитъ однимъ концомъ на землѣ, а другимъ опирается на вертикальную стѣну. Коэффиціенты тренія о

стѣну и о землю f и f', а разстояніе центра тяжести бруска отъ его верхняго и нижняго концовъ a и b. Опредѣлить предѣльный уголъ наклона бруса къ горизонту.

306. Рѣшить задачу 305, предполагая, что центръ тяжести находится въ серединѣ бруса.

307. Доска, наклоненная подъ угломъ α къ горизонту, лежитъ на двухъ опорахъ и скользитъ по нимъ вслѣдствіе своего собственнаго вѣса P. По этой доскѣ бѣжитъ сверху внизъ человѣкъ, вѣсъ котораго $= p$. Найти съ какимъ ускореніемъ онъ долженъ бѣжать, чтобы доска не скользила. Треніе въ разсчетъ не принимается.

Указаніе. Для рѣшенія слѣдуетъ примѣнить начало д'Аламбера.

13. Несвободное криволинейное движеніе. Простой маятникъ.

308. Камень вѣсомъ въ $P = 1$ фунт. привязанъ къ веревкѣ длиною въ $l = 6$ фут. и вращается въ горизонтальной плоскости около другого конца ея. Опредѣлить время одного оборота камня, если натяженіе веревки $F = 3$ ф.

309. Къ концу веревки длиной въ $l = 2$ фут. привязанъ грузъ $Q = 1$ фунт., вращающійся въ горизонтальной плоскости около другого конца ея. Опредѣлить наибольшую скорость и наибольшее число оборотовъ въ 1 сек., которые можно придать этому грузу, если извѣстно, что веревка можетъ выдержать натяженіе въ $P = 100$ фунт.

310. Два тѣла различнаго вѣса движутся съ одинаковой угловой скоростью; первое—по окружности радіуса r, а второе—по окружности радіуса r'. Найти отношеніе между вѣсами тѣлъ, если центробѣжныя силы, развиваемыя ими, равны между собой.

311. Камень вѣсомъ въ $P = 2$ фунт. привязанъ къ веревкѣ длиною въ $l = 1$ футу и вращается около другого конца ея съ постоянной скоростью $v = 8$ фут. въ вертикальной плоскости. Опредѣлить натяженіе веревки въ тѣ моменты, когда камень находится на концахъ горизонтальнаго и вертикальнаго діаметровъ описываемой имъ окружности.

312. Паровозъ вѣсомъ въ 4000 пуд. движется на горизонтальномъ пути по кривой радіусомъ въ 0,5 версты со скоростью 36

верстъ въ часъ. Найти горизонтальное давленіе колесъ паровоза на рельсы.

313. Къ одному концу веревки привязано тѣло вѣсомъ P килогр., а къ другому концу—тѣло вѣсомъ Q килогр. Эта система вращается на гладкой горизонтальной плоскости. Опредѣлить неподвижную точку вращенія системы.

314. Къ концу веревки длиною $l = 4$ фут. привязанъ сосудъ съ водой, вращающійся въ вертикальной плоскости около другого конца веревки. Найти наименьшее число оборотовъ въ минуту, которое долженъ дѣлать сосудъ, чтобы вода не выливалась изъ него, если вѣсъ сосуда равенъ вѣсу находящейся въ немъ воды.

315. Если вѣсъ тѣла на полюсахъ равенъ $P = 1$ килогр., то какую часть вѣса потеряетъ отъ дѣйствія центробѣжной силы это тѣло на широтахъ 0°, 30°, 45°, 60°. Радіусъ земли приблизительно $= 6000$ верстъ.

316. Центрофуга, дѣлающая 800 оборотовъ въ минуту, наполнена мокрой тканью. Найти, во сколько разъ центробѣжная сила капли воды, отстоящая отъ оси на 24 сантим., болѣе ея собственнаго вѣса.

317. Въ наклонной стеклянной трубкѣ находится свинцовый шарикъ. При равномѣрномъ вращеніи трубки около вертикальной оси, проходящей черезъ нижній конецъ трубки, шарикъ поднимается по трубкѣ на высоту h отъ горизонтальной плоскости, находящейся на одномъ уровнѣ съ нижнимъ концомъ трубки, и затѣмъ останавливается. Опредѣлить время одного оборота трубки, если уголъ наклона ея къ горизонту $= \alpha$.

318. Вагонъ, спустившись по нѣкоторой кривой, вступаетъ на нижнюю точку вертикальнаго круга центробѣжной жел. дороги и, пробѣжавъ затѣмъ всю окружность, поднимается по другой кривой. Если радіусъ вертикальнаго круга $= r$, то опредѣлить наименьшую высоту h, съ которой долженъ былъ спуститься вагонъ по первой кривой и наибольшую высоту h', на которую онъ поднимется по второй кривой.

319. Найти время качанія маятника въ 50 фут. длины.

320. Ж. Рише, привезя изъ Парижа въ Кайену секундный маятникъ, замѣтилъ, что время его качанія въ Кайенѣ не равно одной секундѣ. Было ли это время больше или меньше 1 секунды? Что долженъ былъ сдѣлать Рише, чтобы въ Кайенѣ его маятникъ былъ опять секунднымъ?

321. Число качаній въ сутки маятника Рише въ Кайенѣ равнялось 86280. Найти отношеніе ускоренія земного притяженія въ Кайенѣ къ такому же ускоренію въ Парижѣ.

322. Простой маятникъ въ 13 фут. длины былъ отведенъ въ сторону, при чемъ разстояніе его тяжелой частицы отъ вертикали, проходящей черезъ центръ привѣса $=5$ фут. Найти скорость тяжелой частицы въ самой нижней точкѣ движенія.

323. Длина маятника $=4\,^{4}/_{7}$ фута. Если укоротить его на 2 фута, то на какую часть первоначальной величины уменьшится время его качанія.

324. Опредѣлить наибольшее натяженіе нити маятника, у котораго вѣсъ тяжелой частицы $=P$, если амплитуда его качанія $=120^0$.

325. Опредѣлить отношеніе между длинами l и l' двухъ маятниковъ и числами ихъ колебаній въ минуту.

326. Длина нити коническаго маятника $l=4$ ф. Найти число оборотовъ его въ минуту, а также угловую скорость, зная, что маятникъ былъ отклоненъ отъ вертикали на 60^0.

Динамика твердаго тѣла.

14. Поступательное и вращательное движенія. Физическій маятникъ.

327. На аэростатѣ находятся пружинные вѣсы, на которыхъ лежитъ гиря въ 1 фунтъ. Опредѣлить сколько будутъ показывать эти вѣсы, если аэростатъ: a) поднимается со скоростью 4 фут. въ секунду; b) опускается по вертикали съ такой же скоростью.

328. Паровозъ подвѣшенъ на цѣпяхъ. Что произойдетъ при движеніи поршней его впередъ и назадъ?

329. На точныхъ и очень чувствительныхъ физическихъ вѣсахъ уравновѣшенъ колоколъ воздушнаго насоса съ сидящей внутри его мухой. Не нарушится ли равновѣсіе, если муха будетъ летать внутри колокола?

330. Опредѣлить радіусъ инерціи круга радіуса r, вращающагося около оси, перпендикулярной къ его плоскости.

331. Сила $P=4$ пуд., касательная на окружности маховика радіуса $R=6$ фут., сообщаетъ ему въ $t=2$ секун. скорость на окружности $v=3$ фут. Опредѣлить моментъ инерціи маховика.

332. Физическій маятникъ имѣетъ видъ тонкаго стержня, длина котораго $L=12$ фут., подвѣшеннаго за одинъ конецъ. Найти длину соотвѣтствующаго простого маятника.

Примѣчаніе. Моментъ инерціи прямой L относительно перпендикулярной къ ней оси вращенія, проходящей черезъ ея конецъ: $J=\frac{1}{3}L^3$.

333. Стержень, подвѣшенный за одинъ конецъ, совершаетъ одно качаніе въ $^1/_2$ секунды. Найти длину стержня.

334. Веревка, укрѣпленная за одинъ конецъ, совершаетъ одно качаніе въ 2 секунды. Найти длину веревки.

335. Тонкій стержень качается около одного конца. Въ какой точкѣ его можно помѣстить небольшой прибавочный грузъ, чтобы время качанія не измѣнилось.

336. Какое вліяніе окажетъ на продолжительность одного качанія стержня небольшой прибавочный грузъ, помѣщенный a) выше, b) ниже точки, опредѣленной въ предыдущей задачѣ.

337. Физическій маятникъ состоитъ изъ тонкаго стержня, вѣсомъ котораго можно пренебречь, и двухъ равныхъ тяжелыхъ частицъ, прикрѣпленныхъ соотвѣтственно на разстояніи 2 и 3 фут. въ одну сторону отъ точки привѣса. Опредѣлить длину соотвѣтствующаго простого маятника.

338. Физическій маятникъ сходенъ съ разсмотрѣннымъ въ предыдущей задачѣ, но состоитъ изъ трехъ равныхъ тяжелыхъ частицъ, прикрѣпленныхъ на разстояніяхъ 2, 3 и 4 фут. Опредѣлить длину соотвѣтствующаго простого маятника.

339. На тонкомъ стержнѣ $AB=12$ фут., вѣсомъ котораго можно пренебречь, прикрѣплены на разстояніи 1 и 9 фут. отъ A два груза вѣсомъ въ 1 и 3 фунта. Стержень качается около точки, взятой на немъ въ разстояніи 3 фут. отъ A. Опредѣлить длину соотвѣтствующаго простого маятника.

340. Если со стержня, описаннаго въ предыдущей задачѣ, снять оба груза, то какова будетъ тогда длина соотвѣтствующаго простого маятника, принимая во вниманіе массу стержня.

341. Шаръ радіуса R подвѣшенъ на нити длиною L. Опредѣлить длину соотвѣтствующаго простого маятника.

342. Шаръ и цилиндръ имѣютъ одинаковый діаметръ $d=2$ децим. и одинаковый вѣсъ $P=10$ килогр. Шаръ вращается около своего діаметра, а цилиндръ—около своей геометрической оси отъ дѣйствія одинаковой постоянной силы $F=4{,}8$ килогр., которая дѣйствуетъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія каждаго тѣла и, въ первомъ случаѣ, совпадаетъ съ касательной къ окружности большого круга шара, а во второмъ случаѣ, съ касательной къ окружности основанія цилиндра. Опредѣлить угловыя ускоренія шара и цилиндра.

343. Сохраняя прочія условія предыдущей задачи, найти угловыя ускоренія обоихъ тѣлъ, предполагая, что вѣсъ каждаго изъ нихъ равенъ $P'=96$ килогр., а радіусъ равенъ $r=2$ децим.

344. Круглый дискъ вращается около оси, перпендикулярной къ его плоскости и проходящей черезъ его центръ, отъ дѣйствія постоянной силы $F=\frac{1}{196}$ килогр., приложенной къ его окружности. Діаметръ диска $d=20$ сантим., вѣсъ его $P=3$ килогр. Опредѣлить его угловую скорость черезъ 1,2,...10 секундъ послѣ начала движенія.

345. Круглый дискъ вѣсомъ въ $P=98$ килогр. вращается съ угловой скоростью $\omega=10$ децим. вокругъ оси, перпендикулярной къ его плоскости и отстоящей отъ центра диска на разстояніи $n=1,\ 2,\ 3,...10$ сантим. Опредѣлить центробѣжную силу диска.

346. Прямоугольный чугунный параллелепипедъ съ ребрами $a=3$; $b=4$; $c=5$ децим. вращается съ угловой скоростью $\omega=1{,}4$ децим. поочередно около каждаго изъ своихъ реберъ. Опредѣлить центробѣжную силу параллелепипеда, возникающую при вращеніи его около каждаго ребра. Удѣльн. вѣсъ чугуна 7,2.

347. Шаръ скатывается отъ собственнаго вѣса по наклонной плоскости съ высоты h. Найти конечную скорость его.

348. Шаръ катится отъ собственнаго вѣса по наклонной плоскости, уголъ которой съ горизонтомъ $=\alpha$. Найти ускореніе, съ которымъ движется центръ шара.

---

15. Ударъ тѣлъ. Работа и теплота.

349. *) Два вполнѣ неупругихъ шара вѣсомъ въ 12 и 6 килогр., двигавшіеся со скоростями 6 и 3 м., столкнулись между собой, при чемъ произошелъ ударъ. Опредѣлить ихъ общую скорость послѣ удара и потерю живой силы, если шары двигались: a) по одному направленію; b) на встрѣчу другъ другу.

350. Тѣло вѣсомъ въ 4 килогр., двигавшееся со скоростью 8 сантим., получило ударъ отъ другого тѣла вѣсомъ въ 6 килогр., двигавшагося по тому же направленію со скоростью 13 сантим. Опредѣлить ихъ скорости послѣ удара, а также измѣненіе скорости каждаго тѣла, предполагая, что оба тѣла a) вполнѣ неупруги; b) вполнѣ упруги.

351. Вполнѣ упругій шаръ, движущійся со скоростью 10 фут., ударяетъ другой упругій шаръ, находившійся въ покоѣ. Опредѣлить скорости шаровъ въ концѣ перваго и въ концѣ второго періода удара, если вѣсъ перваго шара въ 9 разъ болѣе вѣса второго шара.

352. Два поѣзда вѣсомъ въ 310 и 490 тоннъ, двигавшіеся со скоростями въ 36 и 45 килом. въ часъ, столкнулись другъ съ другомъ. Опредѣлить работу, потраченную на разрушеніе поѣздовъ, если они ѣхали: a) на встрѣчу другъ другу; b) одинъ за другимъ.

353. Свая вѣсомъ въ 20 килогр. вбивается въ землю ударами бабы вѣсомъ въ 300 килогр., падающей съ высоты 1,6 м., при чемъ послѣ каждаго удара свая углубляется на 3 сантим. Опредѣлить сопротивленіе грунта, а также коэффиціентъ безопасности, если нагрузка на каждую сваю не должна превышать 1200 килогр.

354. Мячикъ, брошенный вертикально вверхъ съ начальной скоростью 40 фут., упавъ обратно на полъ, подскочилъ на высоту 9 фут. Найти степень упругости мячика, а также высоту, на которую онъ подпрыгнетъ послѣ 2-го и 3-го паденія.

355. Шаръ, степень упругости котораго $= e$, падаетъ съ высоты h на горизонтальную плоскость, подскакиваетъ отъ удара, снова падаетъ, снова подскакиваетъ и т. д. Найти сумму всѣхъ перемѣщеній шара до полной его остановки.

---

*) Въ помѣщенныхъ здѣсь задачахъ, если не сдѣлано особаго замѣчанія, подъ словомъ *ударъ* подразумѣвается *прямой центральный ударъ*.

356. Совершенно упругій мячикъ былъ брошенъ на полъ подъ угломъ $\alpha = 30^0$ къ плоскости пола. На какомъ разстояніи отъ мѣста паденія мячика долженъ стоять человѣкъ, чтобы мячикъ попалъ ему въ руки, поднятыя на высоту $h = 1$ м. отъ пола.

357. Между двумя равными упругими шарами, изъ которыхъ одинъ былъ въ покоѣ, произошелъ косой ударъ. Найти направленія движенія шаровъ послѣ удара.

358. Два равныхъ упругихъ шара сталкиваются между собой. Первый шаръ двигался съ нѣкоторой скоростью по прямой, соединяющей центры шаровъ при ударѣ, а второй двигался съ такой же скоростью по направленію, перпендикулярному къ этой прямой. Опредѣлить направленія движенія шаровъ послѣ удара.

359. Неупругій шаръ ударяетъ съ нѣкоторой скоростью другой неупругій шаръ, масса котораго вдвое меньше перваго. Найти отношеніе живыхъ силъ этой системы до и послѣ удара.

360. Шаръ вѣсомъ въ 15 фунт., двигавшійся со скоростью 12 фут., столкнулся съ другимъ шаромъ вѣсомъ въ 20 фунт., двигавшимся по тому же направленію со скоростью 6 фут. Опредѣлить величины живыхъ силъ этой системы до и послѣ удара. Оба шара неупруги.

361. Шаръ вѣсомъ въ 6 фунт., двигавшійся со скоростью 7 фут., ударилъ другой шаръ вѣсомъ въ 7 фунт., двигавшійся по тому же направленію со скоростью 6 фут. Оба шара неупруги. Показать, что на работу деформаціи шаровъ истрачена $\frac{1}{169}$ часть живой силы всей системы.

362. Нѣсколько неупругихъ равныхъ шаровъ лежатъ на небольшомъ разстояніи другъ отъ друга въ гладкомъ горизонтальномъ желобѣ. Первый шаръ пускаютъ по желобу со скоростью V. Опредѣлить скорость его послѣ удара со 2-мъ, 3-мъ, 4-мъ и т. д. шарами.

363. Нѣсколько упругихъ шаровъ подвѣшены на нитяхъ такимъ образомъ, что они касаются другъ друга и центры ихъ находятся на одной прямой. Вѣсъ каждаго слѣдующаго шара, считая съ крайняго, вдвое менѣе вѣса предыдущаго шара. Опредѣлить скорость, которую получитъ самый легкій шаръ, если число шаровъ n и первоначальный ударъ произошелъ отъ самаго тяжелаго шара, скорость котораго $= v$.

364. Неупругій шаръ скатывается отъ собственнаго вѣса съ наклонной плоскости, длина которой $l = 210$ фут., а уголъ наклона $\alpha = 30^0$. Найти скорость шара на горизонтальной плоскости послѣ удара.

Примѣчаніе. См. задачу № 347.

365. Найти число единицъ теплоты (калорій), достаточное для произведенія работы одной паровой лошади въ минуту.

366. Ядро вѣсомъ въ 4,9 килогр. ударилось со скоростью 400 метр. въ массивную броню изъ закаленной стали. Опредѣлить количество образовавшейся при этомъ теплоты.

367. Показать, что если свинцовая пуля ударитъ въ желѣзную мишень со скоростью 350 м., то образовавшаяся при этомъ теплота можетъ расплавить свинецъ. Теплоемкость свинца $= \frac{1}{30}$, а температура плавленія его $= 300^0$ С.

Отвѣты и рѣшенія.

218. 3510. **219**. 9000 ф.-ф. = 225 п.-ф.; 3000 кирп. **220**. Почти 5%. **221**. $16{,}1Pt^2$. **222**. 150 л. с. **223**. 112 л. с. **224**. 7,2 кб. м. **225**. 64. **226**. $1\frac{1}{4}$; $3\frac{1}{2}$. **227**. 2400π п.-ф. **228**. 50000 п.-ф. **229**. 8. **230**. 30000 кг.-м. **231**. $\frac{1}{2}h$. **232**. 16500. **233**. 1050 п.-ф. **234**. $31\frac{1}{4}$ саж. **235**. 13,5 тоннъ. **236**. 650 п.-ф. **237**. 346,4 ф.-ф. **238**. $\frac{\pi dnF}{4500} = 15{,}71$ л. с. **239**. 2,1 л. с. **240**. 10 л. с.; 12 л. с. **241**. 20 л. с. **242**. $\frac{\pi d^2 lp}{300}$ л. с.; $\frac{\pi d^2 lnp}{9000}$ л. с. **243**. $\frac{4500N}{\pi dn}$ кгр. **244**. $\frac{0{,}8\,pd^2l}{D}$ кгр. **245**. 200 клгр. **246**. Въ 2 раза. **247**. 5 ф. **248**. 25 сек.; 3 клгр. **249**. $\frac{1}{4}h$. **250**. 3 саж. **251**. Почти 146 пуд. **252**. 42 л. с. **253**. 625 ф.-ф. **254**. 300 кб. м. **255**. 6125 п.-ф. **256**. 702 кгр.-м. **257**. 110,25 кгр.-м. **258**. 1,8 п.; 60 фут. **259**. Почти 510,4 л. с.; 8,75 п. **260**. Въ 192 раза. **261**. 150 кгр.-м.; 75 атм. **262**. 500 пуд.; 0,01 сек. **263**. $P\left(h+\frac{v^2}{2g}\right) = 7{,}5$ п.-ф. **264**. $432\pi^2 = 4259{,}52$ п.-ф. **265**. 20,4 п. **266**. Почти 260 фут. **267**. 64 л. с.; 28 л. с. **268**. $\frac{PV+pv}{P+p} = 6$ м. **269**. $\frac{1}{2}\sqrt{V^2+v^2} = 5$ м. **270**. $v = \frac{P-p}{P+p}60gt = 30$ ф.; $t' = \frac{v}{g} = \frac{15}{16}$ сек. **271**. a) 15 : 17; b) 191 : 193. **273**. $\left(\frac{P-p}{P+p}\right)^2 gt$. **274**. 4,5 g. **275**. Нѣтъ. **276**. $v\sin\alpha$. **277**. $t_1 = 12{,}5$ с.; $t_2 = 17{,}5$ с.; $t_3 = 21{,}25$ с.; $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$; $H_1 = 625$ ф.; $H_2 = 1250$ ф.; $H_3 = 1875$ ф.;

$L_1 = L_2 = 4325$ ф. **278.** $\tan\alpha = \frac{g}{2n} t^2$, гдѣ α уголъ, образуемый начальной скоростью съ горизонтомъ. **279.** $\frac{2}{g} v\sin\alpha(v\cos\alpha + v')$. **280.** $t\sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv'\cos(\alpha - \beta)}$. **281.** $t\sqrt{v^2 + gtv\sin\alpha + \frac{g^2t^2}{4}}$. **282.** $\frac{2v}{g}\cos\alpha(\tan\alpha - \tan\beta) = \frac{2v}{g\cos\beta}\sin(\alpha - \beta)$. **283.** $\frac{2v^2}{g}\cos^2\alpha \tan\beta$. **284.** $f = 0{,}2$; $F_2 = f(P - F) = 6$ кгр. **285.** 1) $v = \frac{p_2 gt}{p_1 + p_2} = 192$ ф.; 2) $\frac{p_2 - fp_1}{p_1 + p_2} gt = 147{,}2$ ф. **286.** 1) $\frac{gt}{2} = 160$ ф.; 2) $\frac{1 - f}{2} gt = 104$ ф. **287.** $p_2 = fp_1 = 1{,}4$ ф. **288.** Вертикальн. скорость системы $= \frac{p^2 gt}{(p + p')^2}$; горизонт. скорость $= \frac{pp'gt}{(p + p')^2}$. Сперва слѣдуетъ опредѣлить скорость тѣла A, а затѣмъ вертик. скорость всей системы, на основанiи того, что количество движенiя системы = суммѣ количествъ движенiя обоихъ тѣлъ ея. **289.** $v_0 = \sqrt{2gfs} = 4{,}2$ м.; $t = 1\frac{5}{7}$ сек. **290.** $S = \frac{1}{2} vt = 20$ ф.; $f = \frac{v}{gt} = 0{,}05$. **291.** $F = \frac{fP}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 13{,}4$ кгр. Слѣдуетъ обратить вниманiе на величину нормальнаго давленiя. **292.** 3,75 кгр. **294.** 7,5 пуд. **295.** 15 сек.; 225 ф. **296.** 30^0. **298.** 39 клгр. **299.** $5\sqrt{3}$; 5; $1 : \sqrt{3}$. **300.** 2 ф. **301.** $\frac{3}{16}$. **302.** 1,28 ф.; 6,25 сек. **303.** 1. **304.** $\tan\alpha = \frac{1}{2f}$. См. зад. 210. Часть I. **305.** $\tan\alpha = \frac{a - ff'b}{(a + b)f}$. **306.** $\tan\alpha = \frac{1 - ff'}{2f}$. **307.** Разложивъ силы P и p на слагающiя, направленныя вдоль доски и перпендикулярныя къ ней, замѣтимъ, что только первыя слагающiя заставляютъ доску скользить по опорамъ, вторыя же слагающiя уравновѣшиваются сопротивленiемъ опоръ. Если a—величина искомаго ускоренiя движенiя человѣка, то по началу д'Аламбера составимъ уравненiе: $\frac{p}{g} a = P\sin\alpha + p\sin\alpha$, откуда $a = g\sin\alpha\left(\frac{P}{p} + 1\right)$. Итакъ, a должно быть болѣе $g\sin\alpha$,

т.-е. ускоренія доски, скользящей отъ собственнаго вѣса. **308.** $2\pi\sqrt{\frac{Pl}{Fg}}=\frac{\pi}{2}=1{,}57$ сек. **309.** $v=\sqrt{\frac{Pgl}{Q}}=80$ ф.; $n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Pg}{Ql}}=6{,}37$. **310.** $P:P'=r':r$. **311.** $\frac{Pv^2}{gl}\pm P$; 6 ф.; 2 ф.; 4 ф. **312.** 77,5 п. **313.** Центръ тяжести системы. **314.** $\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}=27$ оборот. (приблизит.). **315.** На экваторѣ $\frac{1}{289}$. **316.** Почти въ 172 раза. **317.** Такъ при такомъ положеніи шарика равнодѣйствующая силы тяжести и центробѣжной силы должны быть перпендикулярны къ оси трубки, то $t=\frac{2\pi}{\operatorname{tang}\alpha}\sqrt{\frac{h}{g}}$. **318.** Вагонъ, спустившись по кривой, имѣетъ въ нижней точкѣ круга скорость $v_0=\sqrt{2gh}$, а поднявшись по окружности, имѣетъ въ высшей точкѣ ея скорость v, опредѣляемую изъ условія, что центробѣжная сила вагона въ верхней точкѣ должна быть не меньше вѣса вагона, т.-е. $\frac{mv^2}{r}\geqq mg$, гдѣ m—масса вагона. Допустивъ равенство, получимъ $v^2=gr$. Уравненіе живыхъ силъ для подъема по окружности будетъ $\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=mg.2r$, откуда, послѣ подстановокъ и преобразованій, получимъ $h=2{,}5r$. Такимъ же путемъ найдемъ, что $h'=1{,}5r$. **319.** Около 4 сек. **321.** 0,997 : 1. **322.** 8 ф. **323.** На $^1/_4$. **324.** $2P$. **325.** $n:n'=\sqrt{l'}:\sqrt{l}$. **326.** Почти 38 обор.; 4 ф. **327.** $1^1/_8$ ф.; $^7/_8$ ф. **330.** $r:\sqrt{2}$. **331.** 96. **332.** 8 ф. **333.** $\frac{3}{8}.\frac{g}{\pi^2}=\frac{3}{8}$ простого секундн. маятника. **334.** Около 20 ф. **335.** На $^2/_3$ длины стержня, считая отъ точки привѣса. **336** Если выше, то время качанія уменьшится. **337.** 2,6 ф. **338.** $3^2/_9$ ф. **339.** 7 ф. **340.** 7 ф. **341.** $\frac{0{,}4R^2+l^2}{R+l}$. **342.** Для шара 117,6 децим.; для цилиндра 94,1 децим. **343.** Для шара 6,1 децим.; для цилиндра 4,9 децим. **344.** 0,1; 0,2; . . . . 1 децим. **345.** 10; 20; . . . . 100 кгр. **346.** Около a: 27,65 кгр.; около b: 25,05 кгр.; около c:

21,6 кгр. **347**. $\sqrt{2g\left(\frac{5}{7}h\right)}$. **348**. Угловое ускореніе шара $i = \frac{D}{J} = \frac{mg \sin\alpha . r}{J_0 + mr^2}$, а слѣдовательно ускореніе центра шара $a = ir = \frac{mg \sin\alpha . r^2}{\frac{2}{5}mr^2 + mr^2} = \frac{\sin\alpha}{1,4}g$. **349**. 5 м.; 3 м. **350**. *a*) 11; 3 и — 2; *b*) 14 и 9; 6 и — 4. **351**. 9 ф.; 8 и 18 ф. **352**. 4904,3 тон.-метр.; 60,55 тон.-метр. **353**. 15000 клгр., не принимая во вниманіе работы вѣса бабы и сваи; 15320 клгр., считая и эту работу. Коэффиціентъ безопасности $= \frac{2}{25}$. **354**. 0,6; 3,24 ф.; 1,17 ф. **355**. $h\left(1 + \frac{2e^2}{1 - e^2}\right)$. **356**. $h \operatorname{tang} 2\alpha = \sqrt{3} = 1,73$ м. **357**. Будутъ перпендикулярны другъ къ другу. **358**. Первый остановится, а второй покатится по прямой, дѣлящей пополамъ уголъ между скоростями до удара. **359**. 2 : 3. **360**. 45 ф.-ф; $40^5/_{28}$ ф.-ф. **362**. $^1/_2\ v$; $^1/_3\ v$; $^1/_4\ v$ и т. д. **363**. $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} v$. **364**. $v = \cos\alpha \sqrt{2g\frac{5}{7}l \sin\alpha} = 60$ ф. **365**. 10,6 калор. **366**. 94,1 калор.

ОПЕЧАТКИ.

ЧАСТЬ II.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ.*
7	5 снизу	$2(y_1 + y_3 + \ldots) + 4$	$4(y_1 + y_3 + \ldots) + 2$
14	11 „	сумма	сумма работъ
23	16 „	увеличеніе	измѣненіе
24	15 „	подобные	одинаковые
65	7 сверху	$Ji \Big[\omega . \triangle t +$	$Ji \Big[\omega_0 \triangle t +$
76	9 „	$\omega^2 \sqrt{\ }$	$\omega^2 M \sqrt{\ }$

ЧАСТЬ I.

63	11 снизу	пересѣкающіяся	не пересѣкающіяся
156	20 „	$Q : R$	$Q : P$
176	16 „	AB и AC	AD и AC
187	13 „	28 ф.	26 ф.

ОГЛАВЛЕНІЕ.


30 00

